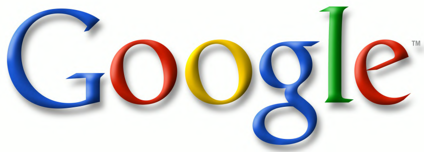
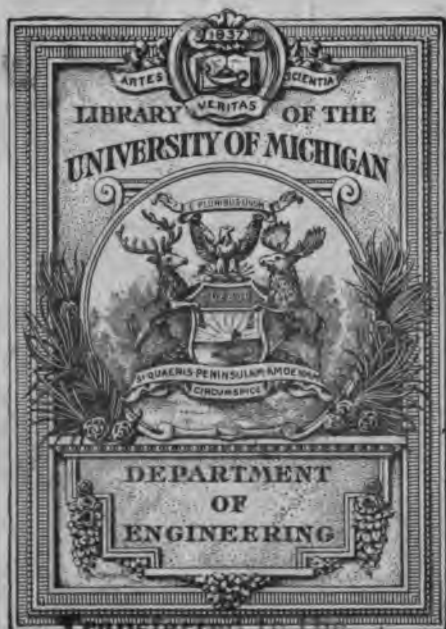
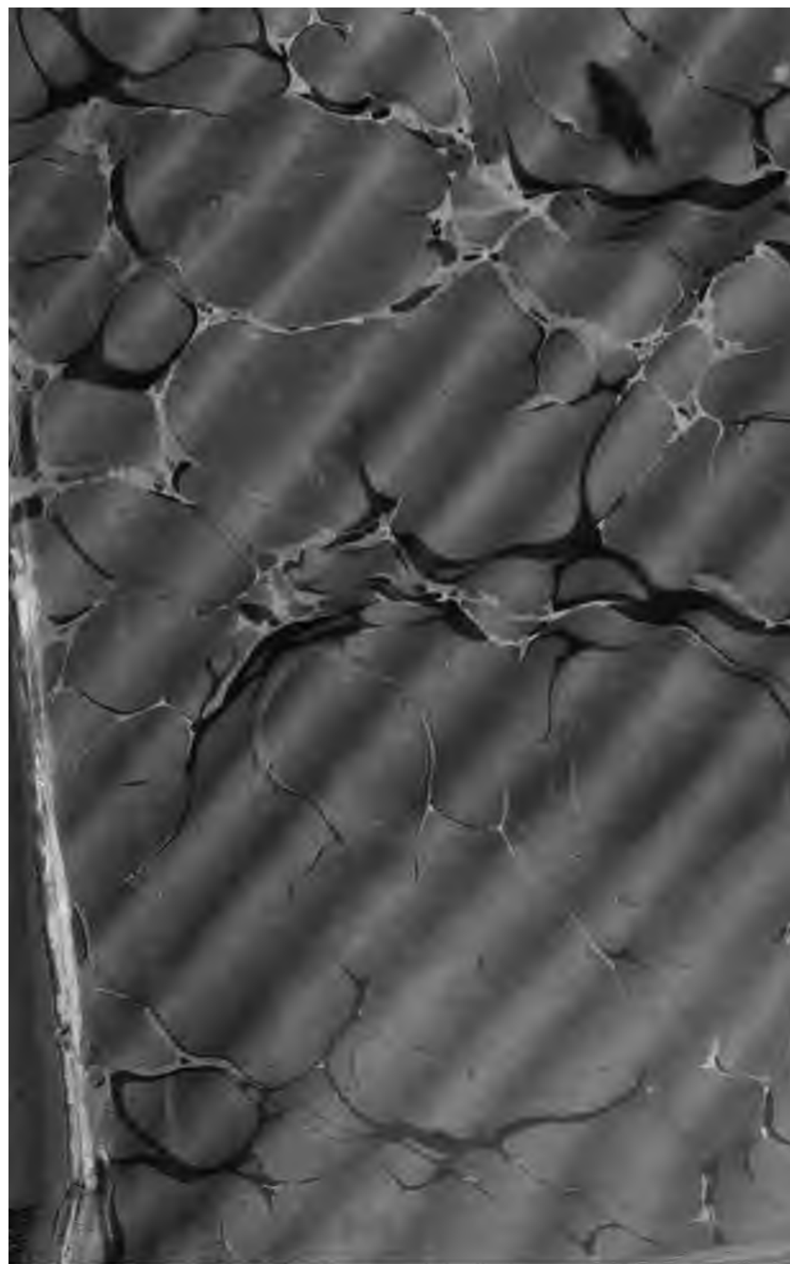



A 759,366 DUPL


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING



LEÇONS
DE
MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE

A L'USAGE DES ÉLÈVES

DES CLASSES DE MATHÉMATIQUES A ET B.

Conformément aux programmes du 31 mai 1902

(*Arrêtés des* 27, 28 *juillet et* 8 *septembre* 1905);

PAR

P. APPELL,
MEMBRE DE L'INSTITUT.

J. CHAPPUIS,
PROFESSEUR A L'ÉCOLE CENTRALE.

Deuxième édition, entièrement refondue.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1907

LEÇONS

DE

MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE.

A LA MÊME LIBRAIRIE.

LEÇONS
DE
MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE

A L'USAGE DES ÉLÈVES

DES CLASSES DE MATHÉMATIQUES A ET B.

Conformément aux programmes du 31 mai 1902

(*Arrêtés des* 27, 28 *juillet et* 8 *septembre* 1905);

PAR

P. APPELL,
MEMBRE DE L'INSTITUT.

J. CHAPPUIS,
PROFESSEUR A L'ÉCOLE CENTRALE

Deuxième édition, entièrement refondue.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1907

LEÇONS

DE

MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE

CHAPITRE PREMIER

CINÉMATIQUE

§ I. — ENGRENAGES CYLINDRIQUES

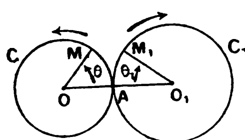
1. **Transformation d'un mouvement de rotation autour d'un axe en un mouvement de rotation autour d'un axe parallèle, sous la condition que le rapport des vitesses angulaires soit égal à une constante donnée.** — Supposons que, dans la construction d'une machine, on ait à résoudre le problème suivant :

Un corps solide (S) *tourne autour d'un axe fixe* O *avec une vitesse angulaire* ω : *on demande de se servir de ce corps pour communiquer à un autre corps* (S_1), *mobile autour d'un axe fixe* O_1 *parallèle au premier, un mouvement de rotation de vitesse angulaire* ω_1 *qui soit* DANS UN RAPPORT CONSTANT DONNÉ k *avec la première :* $\omega_1 = k\omega$.

Il faudra distinguer deux cas, suivant que les rotations doivent se faire dans le même sens ou dans des sens contraires.

2. Emploi des roues de friction : circonférences primitives. — Supposons, pour prendre le cas le plus simple, que les deux rotations doivent se faire en *sens contraires*. Prenons pour plan de la figure (*fig.* 1) un plan perpendiculaire aux deux axes de rotation et appelons O et O_1 les traces des deux axes sur ce plan. Joignons OO_1 et soit A le point qui divise intérieurement OO_1 dans le rapport inverse des vitesses angulaires correspondant aux deux axes donnés

Fig. 1.



$$(1) \qquad \frac{AO}{AO_1} = \frac{\omega_1}{\omega} = k.$$

Le point A étant ainsi déterminé, décrivons de O comme centre avec $OA = R$ comme rayon une circonférence C, et de O_1 comme centre avec $O_1A = R_1$ comme rayon une circonférence C_1.

Construisons une roue ayant la forme d'un cylindre droit, de base C, d'axe O et de hauteur h, et relions invariablement cette roue au corps solide (S) qui tourne autour de O avec la vitesse angulaire ω. Construisons une deuxième roue analogue de base C_1,

d'axe O_1, de même hauteur h, invariablement liée au corps (S_1) qu'il s'agit de faire tourner autour de O_1. Supposons maintenant que ces deux roues (*fig.* 2) soient pressées l'une contre l'autre et que leurs surfaces extérieures en contact soient assez rugueuses pour qu'elles ne puissent pas glisser l'une sur l'autre, mais pour qu'elles puissent seulement rouler l'une sur l'autre. Alors la roue O en tournant entraînera la roue O_1 et, à chaque instant, le rapport des vitesses angulaires $\frac{\omega_1}{\omega}$ sera précisément k. En effet, observons le mouvement de l'instant t_0 à l'instant t. A l'instant t_0 un point de la roue O et un point de la roue O_1 sont en contact en A (*fig.* 1); les roues tournant, ces points se séparent et à l'instant t ils sont en M et M_1 respectivement. Les deux roues ayant roulé l'une sur l'autre, on a

Fig. 2.



$$\text{arc AM} = \text{arc AM}_1,$$

et, en désignant par θ et θ_1 les angles AOM et AO_1M_1 dont les roues ont tourné,

$$R\theta = R_1\theta_1;$$

mais la vitesse angulaire ω de la première roue est la dérivée θ'_t de θ par rapport à t; la vitesse angulaire ω_1 de la deuxième est de même la dérivée

θ'_{1t} de θ_1 par rapport à t. On a donc, en prenant les dérivées par rapport à t des deux membres de la relation ci-dessus,

$$R\omega = R_1\omega_1,$$

d'où

(2) $$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{R}{R_1} = k.$$

La transformation du mouvement cherchée est ainsi réalisée. Les circonférences C et C_1 qui roulent l'une sur l'autre s'appellent *circonférences primitives*. Comme on peut écrire aussi

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{2\pi R}{2\pi R_1},$$

on voit que *le rapport des vitesses angulaires est égal au rapport inverse des longueurs des circonférences primitives*.

Par exemple, si la distance OO_1 des deux axes de rotation est 50^{cm} et si l'on veut que

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{3}{2},$$

on aura

$$R + R_1 = 50, \qquad \frac{R}{R_1} = \frac{3}{2},$$

d'où

$$R = 30^{cm}, \qquad R_1 = 20^{cm},$$

ce qui donne les rayons à attribuer aux deux roues. On peut d'ailleurs vérifier le résultat en remarquant

que les longueurs des circonférences primitives sont proportionnelles à leurs rayons ; la circonférence C_1 est donc les $\frac{2}{3}$ de la circonférence C et, quand la roue O_1 fait trois tours, la roue O en fait deux ; le rapport de leurs vitesses angulaires est donc bien $\frac{3}{2}$.

Le dispositif que nous venons de décrire s'appelle *roues* ou *rouleaux* ou encore *cylindres de friction*. Toute la difficulté, dans l'emploi de ce mécanisme, consiste à empêcher le glissement d'une roue sur l'autre. Il faut, pour cela, presser convenablement ces deux roues l'une contre l'autre : on emploie, à cet effet, des ressorts, des vis de pression, des leviers agissant sur les axes des roues ou sur les coussinets supportant les tourillons.

Cas où les deux rotations doivent être de même sens. — Si les deux rotations ω et ω_1 doivent être de même sens, on peut procéder d'une façon analogue. On prendra, sur OO_1, le point A, *extérieur* au segment OO_1, et divisant ce segment dans le rapport inverse des vitesses angulaires

$$\frac{AO}{AO_1} = \frac{\omega_1}{\omega} = k ;$$

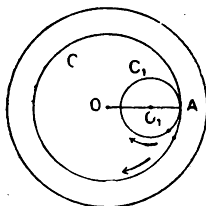
dans la figure 3, k est supposé plus grand que 1.

On arme alors le corps (S_1) d'une roue cylindrique d'axe O_1 et de rayon $O_1A = R_1$; puis on attache au

corps (S) une pièce *évidée* suivant un cylindre circulaire d'axe O et de rayon $OA = R$.

Les circonférences C et C_1 des bases de ces deux cylindres sont les *circonférences primitives*. Si les deux surfaces cylindriques en contact par la génératrice du point A sont pressées l'une contre l'autre, de telle façon qu'elles ne puissent que rouler l'une sur l'autre, le mouvement de rotation autour de O entraînera la roue O_1, dans le même sens, et les deux vitesses angulaires seront, comme précédemment, liées par la relation

Fig. 3.

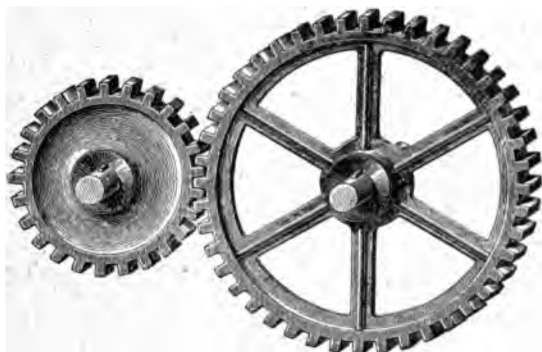


(3) $$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{R}{R_1} = k.$$

3. Engrenages cylindriques. — Lorsque la roue O_1, qu'il s'agit de faire tourner à l'aide de la roue O, doit vaincre des résistances considérables, les roues de friction que nous venons de décrire ne peuvent plus être employées, car la roue menante O glisse alors sur l'autre, O_1, et le mouvement de rotation ne se trouve plus transmis dans les conditions indiquées. Dans ce cas, pour empêcher le glissement, on arme chaque roue de dents qui dépassent la circonférence primitive et l'on y pratique des creux qui entament la circonférence primitive, puis on place les deux roues de telle façon que les dents de l'une entrent dans les

creux de l'autre (*fig.* 4). Dans ces conditions, quand une des roues tourne, elle entraîne forcément l'autre : la forme des dents doit être telle que le mouvement des roues soit le même que si les deux circonférences

Fig. 4.



primitives roulaient l'une sur l'autre. On donne souvent le nom de *pignon* à la plus petite des deux roues, en réservant le nom de *roue* à la plus grande.

A l'extérieur, les dents sont terminées par des arcs de cercle, appartenant à une circonférence concentrique à la circonférence primitive ; de même les creux sont limités à l'intérieur par des arcs d'un cercle concentrique à la circonférence primitive reliant les dents entre elles. Pour que le mouvement soit continu, il faut et il suffit qu'il y ait toujours deux dents en prise à la fois ; on remplit ordinairement cette condition, en limitant les longueurs des dents, de manière que chaque

dent cesse d'agir, lorsque la dent suivante arrive à la ligne des centres.

Pas d'un engrenage ; nombre de dents. — La longueur de l'arc de la circonférence primitive occupée par une dent et le creux adjacent s'appelle le *pas* de l'engrenage : ce pas est le même sur les deux roues. Soient p le pas, n le nombre de dents de la roue O, n_1 le nombre de dents de la roue O_1 ; on a

$$np = 2\pi R, \qquad n_1 p = 2\pi R_1,$$

car la somme des pas sur chaque roue est évidemment la circonférence primitive. Donc

$$(4) \qquad \frac{n}{n_1} = \frac{R}{R_1} = \frac{\omega_1}{\omega}.$$

Les nombres de dents sont donc proportionnels aux rayons et inversement proportionnels aux vitesses angulaires.

Rotations de même sens. — Dans le dispositif que nous venons d'étudier, les engrenages sont extérieurs, les roues tournent en sens contraires ; si les roues doivent tourner dans le même sens, on peut de même partir des circonférences primitives indiquées dans la figure 3 et les armer de dents d'après les mêmes principes. Les relations (4) continuent à s'appliquer. On a alors des *engrenages intérieurs*.

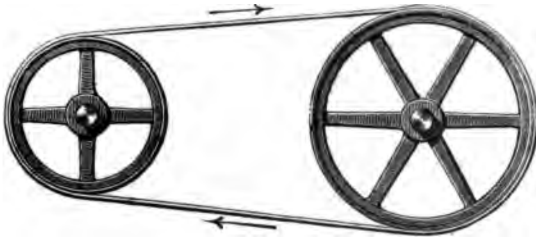
4. Emploi de courroies ou de chaînes. — Les roues de friction et les engrenages ne peuvent être utilisés que si les deux axes de rotation ne sont pas trop loin l'un de l'autre.

Quand la distance des axes est grande, on munit les deux axes de roues dont les rayons R et R_1 sont toujours assujettis à la relation

$$\frac{R}{R_1} = \frac{\omega_1}{\omega} \qquad (5)$$

et l'on transmet le mouvement de rotation de l'une des

Fig. 5.



roues à l'autre, soit par une courroie ne glissant pas sur les roues (*fig.* 5), soit par une chaîne (*fig.* 6) : c'est le mécanisme employé dans une bicyclette pour transmettre le mouvement de rotation du pédalier à la roue d'arrière.

Comme la courroie et la chaîne ne glissent pas sur les roues, si la roue menante tourne d'un angle θ, la longueur de courroie ou de chaîne enroulée sur cette roue est $R\theta$; cette longueur doit se dérouler de la roue

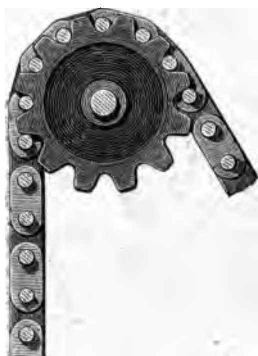
menée; celle-ci tourne donc d'un angle θ_1 tel que l'arc correspondant $R_1\theta_1$ soit égal à $R\theta$:

$$R_1\theta_1 = R\theta,$$

d'où l'on déduit, en dérivant par rapport à t,

$$R_1\omega_1 = R\omega.$$

Fig. 6.



On voit que la relation (5) est satisfaite. Quand les circonférences primitives sont munies de dents et de creux, le *pas* doit être le même sur chaque roue, les nombres n et n_1 des dents sont donc proportionnels aux circonférences primitives, c'est-à-dire aux rayons, et l'on a encore

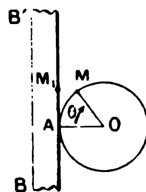
$$\frac{n}{n_1} = \frac{R}{R_1} = \frac{\omega_1}{\omega}.$$

5. **Crémaillère.** — On emploie également les roues dentées pour transformer un mouvement circulaire continu en mouvement rectiligne continu.

Imaginons une barre rectiligne AB guidée de façon à pouvoir prendre un mouvement de translation rectiligne dans le sens de sa longueur AB (*fig.* 7). Supposons, d'autre part, qu'une roue circulaire de rayon R ou *pignon* soit mobile autour d'un axe O, perpendi-

culaire à la direction du mouvement de translation ; admettons que cette roue soit pressée contre la barre de façon qu'elle ne puisse que rouler sur la barre. Alors, quand la roue tourne avec une vitesse angulaire ω, la barre glisse avec une vitesse V que nous allons calculer. Soit A le point de contact à l'instant t_0 ; à l'instant t, le point de la roue qui était en A vient en M, et celui de la barre qui était en A vient en M_1. Appelons x la longueur AM_1 et θ l'angle AOM dont la roue a tourné ; la longueur AM_1 étant égale à l'arc AM, à cause du roulement, on a

Fig. 7.



$$x = R\theta,$$

d'où, en dérivant par rapport à t,

$$V = \omega R.$$

Pour empêcher le glissement de la roue sur la barre, on arme la tige et le pignon de dents (*fig.* 8) taillées de telle façon que, quand le pignon tourne en entraînant la barre, le mouvement soit le même que si la circonférence primitive du pignon roulait sur la ligne droite BB′.

Fig. 8.



La barre rectiligne dentée BB′ s'appelle *crémaillère*. Ce dispositif peut être considéré comme un cas

limite du système de deux roues dentées, le cas où le rayon de l'une des roues deviendrait tellement grand qu'un arc AB de sa circonférence pourrait être regardé comme une ligne droite.

La machine représentée dans la figure 8 est le *cric* qu'on emploie à soulever de très lourds fardeaux à une faible hauteur.

6. Valeur algébrique du rapport de deux vitesses angulaires autour d'axes parallèles. — Jusqu'ici nous nous sommes occupés seulement de la valeur absolue du rapport des vitesses angulaires de deux roues dont les axes de rotation sont parallèles, en distinguant les deux cas où les roues tournent dans le même sens ou dans des sens contraires. On peut simplifier les formules et le langage en convenant d'appeler *valeur algébrique* du rapport de deux vitesses angulaires, autour d'axes parallèles, *la valeur absolue de ce rapport précédée du signe + quand les deux roues tournent dans le même sens et du signe — quand elles tournent en sens contraires.*

Avec cette convention, si l'on fait engrener extérieurement deux roues ayant n et n_1 dents, les deux roues tournent en sens contraires, le rapport $\frac{\omega_1}{\omega}$ des vitesses angulaires devra être considéré comme négatif et l'on aura, pour la valeur algébrique de ce rapport,

$$\frac{\omega_1}{\omega} = -\frac{n}{n_1}.$$

Si l'on prend un engrenage intérieur, dont les circonférences primitives présentent la disposition de la figure 3, et dont les roues ont n et n_1 dents, ces deux roues tournent dans le même sens et la valeur algébrique du rapport des vitesses angulaires est positive et donnée par la relation

$$\frac{\omega_1}{\omega} = +\frac{n}{n_1}.$$

De cette façon, on remplace par un signe + ou — la condition, pour les deux roues, de tourner dans le même sens ou dans des sens contraires.

Ainsi, au lieu de dire qu'on veut réaliser un engrenage dans lequel les deux roues tournent en sens contraires avec des vitesses angulaires ayant pour rapport $\frac{8}{15}$ en valeur absolue, on dira qu'on veut réaliser un engrenage dans lequel la valeur algébrique du rapport des vitesses angulaires est $-\frac{8}{15}$. Pour cela, il faudra prendre deux roues extérieures ayant l'une 8, l'autre 15 dents, ou l'une 16 et l'autre 30 dents, etc.

7. **Roues intermédiaires.** — Les difficultés matérielles de la construction imposent des limites au nombre des dents d'une roue d'engrenage. On ne construit guère, d'une façon courante, de roues ayant moins de 6 dents ou plus de 120. En admettant ces limites, nous voyons que,

si l'on fait engrener deux roues ayant n et n_1 dents, le rapport

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \pm \frac{n}{n_1}$$

des vitesses angulaires aura, pour valeur absolue, une fraction dont chaque terme est compris entre 6 et 120. On ne pourra donc réaliser, par l'engrènement direct de deux roues, que les rapports de vitesses angulaires répondant à cette condition.

Par exemple, on pourra construire deux roues telles que l'on ait

$$\frac{\omega_1}{\omega} = -\frac{4}{5};$$

il suffira d'écrire, en remplaçant $\frac{4}{5}$ par des fractions équivalentes,

$$\frac{\omega_1}{\omega} = -\frac{8}{10}$$

ou

$$\frac{\omega_1}{\omega} = -\frac{12}{15},$$

et ainsi de suite, et l'on pourra prendre deux roues extérieures ayant 8 et 10 dents, ou 12 et 15, etc.

Au contraire, si l'on voulait que

$$\frac{\omega_1}{\omega} = -\frac{243}{200},$$

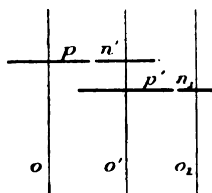
comme cette fraction est irréductible, on serait forcé de faire engrener directement deux roues extérieures de 243 et 200 dents, ce qui sortirait tout à fait de la construction usuelle.

Pour réaliser des rapports de vitesses de ce genre, on peut employer ce qu'on appelle des *roues intermédiaires* ou

des *trains d'engrenages*. Nous allons en donner quelques exemples simples.

Premier exemple. — Prenons, comme plan de la figure, un plan parallèle aux deux axes O et O_1 (*fig.* 9). Le premier arbre qui tourne autour de l'axe O avec une vitesse angulaire ω porte une roue à p dents qui, sur la figure, est désignée par p et représentée par un simple trait perpendiculaire à l'axe O. Un arbre intermédiaire qui tourne autour d'un axe O′, parallèle aux deux axes donnés O et O_1, porte deux roues dentées qui lui sont invariablement liées et qui, par conséquent, sont invariablement liées entre elles : ces deux roues sont supposées avoir n' et p' dents : elles sont représentées sur la figure par deux traits n' et p' perpendiculaires à l'axe O′ ; la roue n' engrène avec la roue p de l'arbre précédent O. Dès lors l'arbre O′ tourne avec la vitesse angulaire ω' donnée par la relation

Fig. 9.



$$(6) \qquad \frac{\omega'}{\omega} = -\frac{p}{n'}.$$

Enfin l'arbre O_1 porte une roue de n_1 dents qui engrène avec la roue à p' dents de l'arbre précédent O′ : l'arbre O_1 tourne donc avec une vitesse angulaire ω_1 liée à ω' par la relation

$$(7) \qquad \frac{\omega_1}{\omega'} = -\frac{p'}{n_1}.$$

En multipliant membre à membre les relations (6) et (7),

pour éliminer la vitesse ω' de l'arbre auxiliaire O', on a

$$\frac{\omega_1}{\omega} = + \frac{pp'}{n' n_1}. \tag{8}$$

On voit donc que, par ce dispositif, on peut réaliser un rapport de vitesses angulaires *positif* (rotations de même sens), dans lequel le numérateur est le produit de deux nombres compris entre 6 et 120 et le dénominateur également. Par exemple, si l'on veut que

$$\frac{\omega_1}{\omega} = + \frac{144}{55},$$

on peut écrire, en décomposant en facteurs,

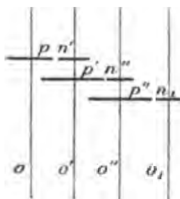
$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{24.6}{11.5} = \frac{24.12}{11.10};$$

on pourra donc réaliser ce rapport à l'aide du dispositif précédent, en prenant

$$p = 24, \quad n' = 11,$$
$$p' = 12, \quad n_1 = 10.$$

Le premier arbre O portera une roue de 24 dents, le deuxième, O', une roue de 11 dents et une de 12, le troisième, O_1, une de 10. La roue à 24 dents engrènera avec la roue à 11, la roue à 12 avec la roue finale à 10.

Fig. 10.



Second exemple avec deux arbres intermédiaires. — Disposons la figure de la même façon. L'arbre O porte une roue à p dents et tourne avec la vitesse angulaire ω (*fig.* 10); un arbre parallèle auxiliaire O'

porte deux roues à n' et p' dents et tourne avec la vitesse angulaire ω' ; un deuxième arbre parallèle auxiliaire O'' porte deux roues à n'' et p'' dents et tourne avec la vitesse ω'' ; enfin l'arbre final, O_1, porte une roue à n_1 dents et tourne avec la vitesse ω_1. Les roues p et n' engrènent, de même p' et n'', de même p'' et n_1. On a donc

$$\frac{\omega'}{\omega} = -\frac{p}{n'},$$

$$\frac{\omega''}{\omega'} = -\frac{p'}{n''},$$

$$\frac{\omega_1}{\omega''} = -\frac{p''}{n_1}.$$

En multipliant membre à membre, pour éliminer les vitesses ω' et ω'' des arbres intermédiaires, on a

$$\frac{\omega_1}{\omega} = -\frac{p\,p'\,p''}{n'\,n''\,n_1}.$$

Les rotations des arbres extrêmes sont donc de sens contraires et leur valeur absolue est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des produits de trois nombres compris entre 6 et 120. Soit, par exemple, à réaliser le rapport

$$\frac{\omega_1}{\omega} = -\frac{243}{200};$$

on peut écrire en décomposant en facteurs

$$\frac{\omega_1}{\omega} = -\frac{9 \cdot 9 \cdot 3}{10 \cdot 10 \cdot 2} = -\frac{9 \cdot 9 \cdot 12}{10 \cdot 10 \cdot 8},$$

où l'on a remplacé $\frac{3}{2}$ par $\frac{12}{8}$. Il suffira alors, dans le dispo-

sitif précédent, de prendre

$$\begin{array}{llllll} p=9, & n'=10, & & & & \\ & p'=9, & n''=10, & & & \\ & & p''=12, & n_1=8, & & \end{array}$$

où les roues dont les nombres de dents sont sur une même horizontale engrènent entre elles, et où celles dont les nombres de dents sont sur une même verticale sont portées par le même axe.

On pourrait continuer de la même façon, en prenant un nombre quelconque d'axes intermédiaires.

§ II. — SYSTÈMES ARTICULÉS PLANS.

8. **Emploi de systèmes articulés plans.** — Dans beaucoup de machines, on emploie, pour transformer des mouvements en d'autres, des *systèmes articulés plans*.

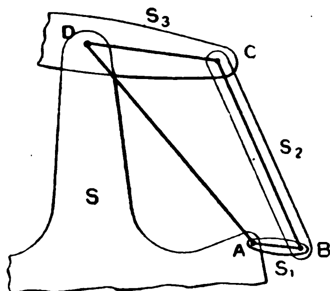
Nous dirons que deux corps solides S et S_1 sont *articulés* l'un à l'autre par un axe O, quand ils sont liés de telle façon que le mouvement de l'un, par rapport à l'autre, puisse être uniquement une rotation autour d'un axe O invariablement lié aux deux corps. Telles sont les deux branches d'un compas, les deux lames d'une paire de ciseaux.

Un *système articulé plan* est alors formé d'un nombre quelconque de corps solides S, S_1, S_2, . . . qui sont articulés les uns aux autres, de telle façon que tous *les axes d'articulation soient parallèles entre eux*. Ces

divers corps sont les *membres* du système articulé : par exemple, prenons quatre corps solides S, S_1, S_2, S_3 (*fig.* 11) ; articulons S avec S_1 autour d'un axe A, S_1 avec S_2 autour d'un axe B, S_2 avec S_3 autour d'un axe C, enfin S_3 avec S autour d'un axe D, et supposons ces quatre axes *parallèles*.

Nous aurons, en prenant comme plan du dessin un

Fig. 11.



plan P *perpendiculaire* aux quatre axes, la figure 11, où A, B, C, D sont les intersections des quatre axes par ce plan.

Ce système possède quatre membres qui sont les quatre corps solides. L'un d'eux, S par exemple, étant maintenu fixe, les autres peuvent se mouvoir d'après certaines lois que nous examinerons plus loin ; mais les déplacements des divers points des membres mobiles se font tous dans des plans fixes parallèles au plan P, et il est évident qu'il suffit de connaître les positions des figures planes suivant lesquelles les corps S_1, S_2, S_3

sont coupés par le plan P, pour connaître les positions de ces corps eux-mêmes. Il suffit même de connaître les positions des droites AB, BC, CD, DA situées dans le plan P, pour connaître les positions des corps solides correspondants. Ces droites forment un quadrilatère articulé plan : l'étude des déplacements que peuvent prendre trois des corps S_1, S_2, S_3 quand le quatrième S est fixe, se ramène donc, en dernière analyse, à l'étude des déplacements que peuvent prendre trois côtés d'un quadrilatère plan articulé, quand le quatrième est fixe.

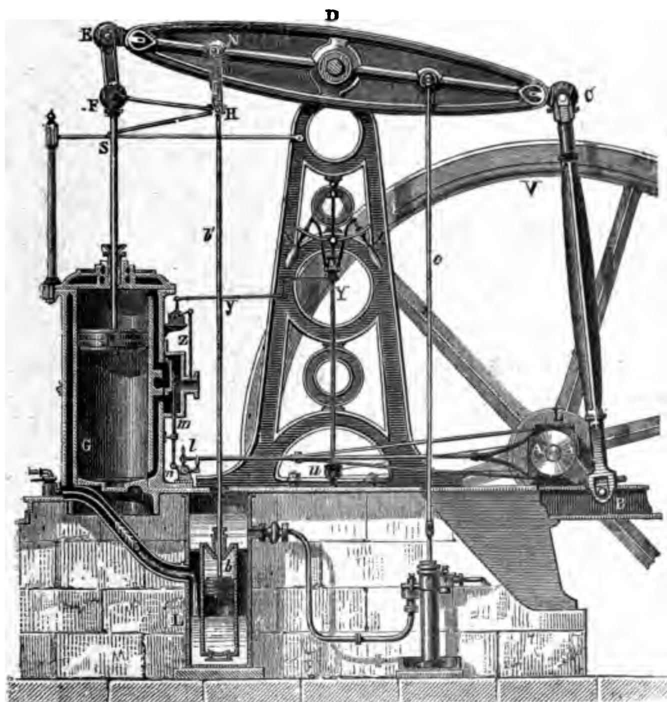
Des remarques analogues peuvent être faites pour des systèmes articulés plans d'un nombre quelconque de membres.

Pour montrer un exemple de l'emploi des systèmes articulés plans dans les machines, prenons (*fig.* 12) une machine à vapeur avec balancier. Nous y verrons, à droite, un système articulé à quatre membres, comme celui que nous venons de décrire. Tout d'abord au milieu se trouve un bâti fixe, constituant le premier membre qui joue le rôle du solide S de la figure 11. A ce bâti est articulé, par un axe horizontal, un balancier DC jouant le rôle du solide S_3 ; au balancier est articulé un corps solide CB constituant le troisième membre S_2 ; enfin ce corps CB est articulé au solide BA formant le quatrième membre S_1 articulé lui-même en A au bâti S. Les quatre articulations sont constituées par des axes perpendiculaires au plan de la figure.

Quand la machine marche, le bâti est fixe ; le balancier DC reçoit du piston P, par l'intermédiaire de tiges

articulées, un mouvement oscillatoire autour de D ; le membre CB appelé *bielle* est entraîné par le mouve-

Fig. 12.



ment et imprime au corps BA appelé *manivelle* un mouvement de rotation continu autour de A, mouvement qui entraîne l'arbre et la grande roue ou *volant* représentée sur la figure.

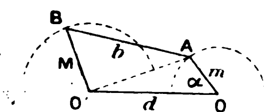
Pour étudier en détail le mouvement de ce système articulé, il suffit d'étudier le mouvement des droites qui joignent les pieds des quatre axes sur le plan de la figure 11 et qui forment un quadrilatère articulé ABCD dont un côté AD est fixe.

Sur la même figure (12), nous voyons d'autres systèmes articulés plans, un parallélogramme articulé EFHN appelé *parallélogramme de Watt*; la tige FP du piston est articulée en F au membre EF de ce parallélogramme; une tige bb'H d'une pompe est articulée en H au membre NH, etc.

Nous allons étudier, en détail, le système articulé plan à quatre membres dont un membre est fixe.

9. Transmission par bielle et manivelles. — Imaginons un système articulé plan à quatre membres dont un est fixe. Nous pourrons, pour étudier les mouvements possibles des trois membres mobiles, remplacer les quatre membres par les lignes droites joignant les quatre points, où les quatre axes d'articulation sont rencontrés par un plan qui leur est perpendiculaire.

Fig. 13.



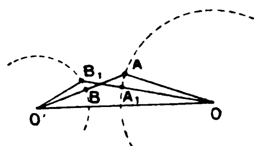
Soient alors OO′ le membre fixe, OA, AB, O′B les trois autres membres (*fig.* 13). On appelle ordinairement *manivelles* les deux membres OA et O′B qui tournent autour d'axes fixes O et O′ et *bielle* le membre AB reliant les deux manivelles. Quand on fait tour-

ner une manivelle, elle entraîne l'autre par l'intermédiaire de la bielle. On a donc là un nouveau moyen de transformer un mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un axe O en un mouvement de rotation autour d'un axe parallèle O'; seulement, le rapport des vitesses angulaires *n'est pas constant*. En outre, les mouvements que peuvent prendre les manivelles OA et O'B sont de natures diverses, suivant les longueurs relatives des quatre côtés du quadrilatère OABO'.

Il peut, à ce dernier point de vue, se présenter trois cas.

Premier cas : aucune des manivelles ne peut faire un tour complet autour de son axe de rotation. — Dans ce cas les deux manivelles oscillent seulement entre deux positions extrêmes, et le mécanisme peut seulement servir à transformer un mouvement oscillatoire (circulaire alternatif) autour d'un axe O en un mouvement oscillatoire autour d'un axe O'. Ce cas se présente, par exemple, si la bielle est très petite par rapport aux autres côtés OA, O'B, OO'; car, alors, la manivelle OA ne peut pas faire avec OO' un angle plus grand que l'angle O'OA (*fig.* 14) correspondant à la position dans laquelle la bielle AB et l'autre manivelle O'B sont dans le prolongement l'une

Fig. 14.



de l'autre; de même la deuxième manivelle ne peut pas dépasser la position $O'B_1$, dans laquelle la manivelle OA_1 et la bielle A_1B_1 sont dans le prolongement l'une de l'autre.

Deuxième cas : une des deux manivelles peut faire un tour complet autour de son axe de rotation, mais pas l'autre. — Supposons, par exemple, que OA puisse faire un tour complet autour de O, mais qu'alors O'B ne fasse pas un tour complet et oscille seulement entre deux positions extrêmes. Le mécanisme peut, dans ce cas, servir à transformer un mouvement de rotation continu autour de O en un mouvement oscillatoire autour de O' ou, inversement, un mouvement oscillatoire autour de O' en un mouvement de rotation continu autour de O.

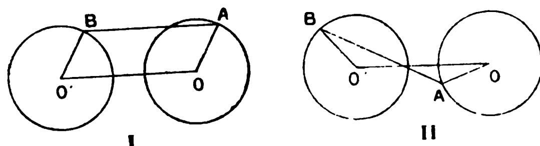
C'est ce qui se passe dans le système articulé à quatre membres que nous avons étudié dans la machine de la figure 12. Le balancier DC ne fait qu'osciller autour de D, entre deux positions extrêmes, quand la manivelle AB fait un tour entier autour de son axe A.

Un mécanisme de ce genre est employé dans les tours à pédale. La pédale a un mouvement d'oscillation ou mouvement alternatif autour d'un axe fixe; elle communique, par l'intermédiaire d'une bielle et d'une manivelle, un mouvement de rotation continu au tour.

Troisième cas : les deux manivelles peuvent faire une

révolution complète autour de leurs axes. — Dans ce cas, quand l'une des manivelles fait une révolution autour de son axe, elle oblige l'autre à faire également une révolution autour de son axe. Le mécanisme peut alors servir à transformer un mouvement de rotation continu autour d'un axe O en un mouvement de rotation continu autour d'un axe parallèle O'. L'exemple le plus simple de ce troisième cas s'obtient en supposant les deux manivelles égales entre elles et la bielle égale à la distance des centres. Le quadrilatère OO'BA est alors un parallélogramme articulé, s'il est convexe

Fig. 15.



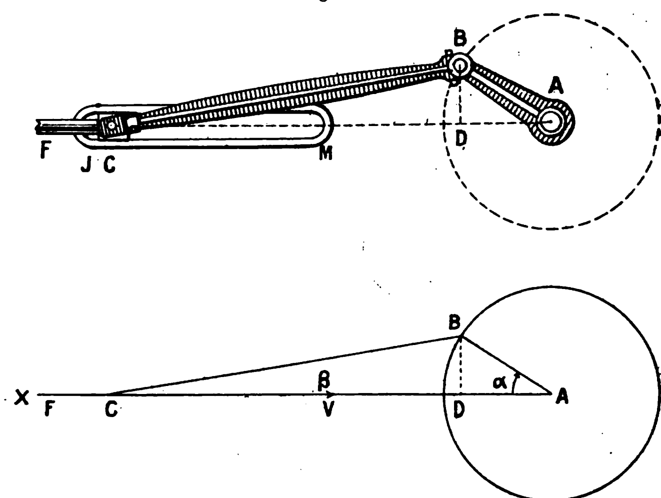
(*fig.* 15, I); c'est la figure appelée *contre-parallélogramme,* s'il est concave (*fig.* 15, II).

On peut dire que la solution qui consiste à prendre un parallélogramme articulé est évidente *a priori;* quand on l'emploie, les deux manivelles tournent avec la même vitesse angulaire.

10. **Tige guidée et manivelle réunies par une bielle.** — Pour transformer un mouvement rectiligne alternatif en mouvement circulaire continu, on emploie fréquemment une tige guidée qui est réunie à une manivelle par une bielle. Ce dispositif est constam-

ment employé dans les machines à vapeur. Le mouvement de va-et-vient de la tige du piston FC (*fig.* 16) est transformé en un mouvement de rotation autour d'un axe fixe A, par l'intermédiaire de la bielle CB articulée en C à la tige du piston et en B à l'extrémité de la manivelle AB. Pour que la tige du piston ne soit pas

Fig. 16.



faussée par la bielle, qui exerce sur elle un effort oblique, on guide sa tête C par une glissière rectiligne JM qui ne lui permet plus qu'un mouvement de translation rectiligne.

Cherchons la relation qui lie la position du point C de la tête du piston à celle de la manivelle. Faisons une figure schématique (*fig.* 16) où nous représente-

rons chacun des membres du système articulé par une droite. Soient FC la tige du piston qui va et vient sur l'axe fixe AX, CB la bielle de longueur b, AB la manivelle de longueur m. Appelons α l'angle de la manivelle avec AX, β l'angle de la bielle avec CA.

La proportion des sinus appliquée au triangle ABC donne à chaque instant, entre ces deux angles, la relation

$$(1) \qquad m \sin \alpha = b \sin \beta.$$

D'autre part, l'abscisse $x = AC$ du point C est la somme AD + DC des projections de la manivelle et de la bielle sur OX

$$(2) \qquad x = m \cos \alpha + b \cos \beta.$$

La relation (1) donne $b \cos \beta = \sqrt{b^2 - b^2 \sin^2 \beta} = \sqrt{b^2 - m^2 \sin^2 \alpha}$; d'où, en portant dans (2),

$$(3) \qquad x = m \cos \alpha + \sqrt{b^2 - m^2 \sin^2 \alpha} \, ;$$

on a ainsi x en fonction de α.

Quand α part de zéro, la figure montre que β part aussi de zéro et x de $b + m$; α croissant, β croît ; pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, β atteint un maximum ; puis, α continuant à croître, β décroît ; pour $\alpha = \pi$, β est nul et x égal à $b - m$.

On pourrait calculer la vitesse du point C en calculant la dérivée $\frac{dx}{dt}$ de x par rapport à t à l'aide de la

relation (3) et remarquant que $\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$ est la vitesse angulaire de la manivelle; mais ce calcul sortirait des limites du programme.

Remarque. — Dans la plupart des machines, la bielle est très longue par rapport à la manivelle, l'angle β est petit, $\cos\beta$ reste sensiblement égal à 1, et l'on a approximativement, d'après (2),

$$x = m\cos\alpha + b:$$

l'abscisse x du point C diffère donc, d'une constante b, de l'abscisse

$$\text{AD} = m\cos\alpha$$

de la projection D du point B sur AX, et la vitesse du point C est sensiblement égale à celle du point D.

11. **Pantographes et inverseurs.** — Les systèmes articulés plans qui suivent sont plutôt des instruments d'un caractère géométrique que des mécanismes employés dans les machines.

Ces systèmes permettent de réaliser mécaniquement les deux transformations de figures que l'on a étudiées en Géométrie sous le nom d'*homothétie* et d'*inversion* ou *transformation par rayons vecteurs réciproques*.

12. **Homothétie; pantographe.** — On sait que la définition de l'homothétie directe est la suivante. Soient O un point fixe appelé *centre d'homothétie* (*fig.* 17), k un

nombre constant positif; faisons correspondre, à chaque point M d'un plan passant par O, un point M′ tel que les points M, M′ soient alignés avec O, d'un même côté de O et que l'on ait

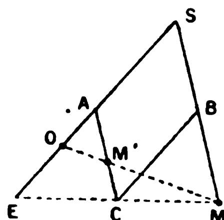
$$\frac{OM'}{OM} = k.$$

Quand le point M décrit une ligne, le point M′ décrit une ligne homothétique. Quand le point M parcourt les

Fig. 17.



Fig. 18.



contours d'un dessin, le point M′ décrit un dessin *homothétique,* c'est-à-dire un agrandissement ou une réduction du dessin primitif à une échelle k. Par exemple, si $k = \frac{1}{3}$, le point M′ décrit une réduction au tiers.

Le pantographe permet de réaliser cette transformation par un système de tiges.

Imaginons un parallélogramme articulé CASB (*fig.* 18) dans lequel les tiges SA et SB sont prolongées chacune d'une quantité égale à sa propre longueur :

$$AE = SA = a,$$

$$BM = SB = b.$$

On assujettit le côté SE à tourner autour d'un de ses points O supposé fixe : pour cela, le côté SE porte un curseur pouvant glisser sur AE et pouvant se fixer en un point quelconque de AE : ce curseur porte un canon dans lequel est fixée une pointe d'acier pouvant servir de pivot à l'appareil. Le point fixe O va être le centre d'homothétie.

Désignons par k le rapport des distances du pivot O aux deux sommets A et S :

$$\frac{OA}{OS} = k. \tag{1}$$

Marquons ensuite, sur la tige AC, le point M' tel que

$$\frac{AM'}{SM} = k. \tag{2}$$

Quelle que soit la configuration du quadrilatère, les trois points O, M', M *seront en ligne droite et l'on aura*

$$\frac{OM'}{OM} = k. \tag{3}$$

En effet, si l'on joint OM' et OM, les deux triangles OAM', OSM sont semblables comme ayant des angles égaux en A et S compris entre côtés proportionnels, puisque, d'après (1) et (2),

$$\frac{OA}{OS} = \frac{AM'}{SM} = k.$$

Les angles AOM' et SOM sont donc égaux, et OM' se confond en direction avec OM. En outre, le rapport de similitude des deux triangles OAM' et OSM étant k, le rapport des côtés $\frac{OM'}{OM}$ est égal à k.

En résumé, quand on fait tourner le parallélogramme autour de O, en le déformant dans un plan fixe, le point M′ reste homothétique de M par rapport à O, le rapport d'homothétie étant k. Si donc on place une pointe à calquer dans un canon fixé en M et un crayon dans un canon fixé à un curseur placé en M′, quand on fera décrire à la pointe M un dessin quelconque, le crayon M′ décrira un dessin homothétique à l'échelle k.

Si l'on place O en E, M′ viendra en C : alors

$$k = \frac{1}{2};$$

si donc on met le pivot en E, quand M décrit une figure, C décrit la figure réduite de moitié.

Il va de soi qu'on ne pourra faire décrire aux points M et M′ que des figures situées dans une certaine région limitée du plan, car les distances OM et OM′ restent comprises entre des limites dépendant des dimensions de l'appareil.

13. **Inversion ; inverseur de Peaucellier.** Rappelons d'abord la définition géométrique de l'inversion. Soit, dans un plan fixe, un point fixe O (*fig.* 17) appelé *pôle d'inversion* et une constante positive k^2 donnée. Faisons correspondre, à chaque point M du plan, un point M′ aligné avec lui, de telle façon que

$$\mathrm{OM} \,.\, \mathrm{OM'} = k^2.$$

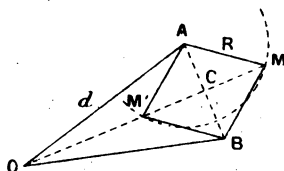
Les deux points M et M′ sont dits *inverses* suivant le module k^2. Quand M décrit une figure. M′ décrit une figure dite *inverse de la première.* Par exemple, on a vu

en Géométrie que, si M décrit une droite, M′ décrit une circonférence passant par le pôle et réciproquement; si M décrit un cercle ne passant pas par le pôle O, M′ décrit un autre cercle ne passant pas par O.

On peut réaliser mécaniquement cette transformation à l'aide d'un système articulé à six tiges, imaginé par le général Peaucellier.

Considérons (*fig.* 19) un losange articulé MAM′B, dont

Fig. 19.



deux sommets opposés A et B sont reliés à un point fixe O par deux tiges égales OA et OB, articulées en O et articulées également aux sommets A et B.

Quelle que soit la position qu'on donne à ce système, dans un plan, autour du point O en en faisant varier les angles, *les points* M *et* M′ *restent alignés avec* O *et l'on a*

$$\mathrm{OM} \,.\, \mathrm{OM}' = k^2.$$

En effet, la droite MM′ est perpendiculaire à AB en son milieu C; elle va donc passer au point O qui est également distant des deux points A et B. En outre, si l'on imagine la circonférence décrite de A comme centre avec AM = AM′ = R comme rayon, le produit OM . OM′ est la puissance du point O par rapport à cette circonférence. On a donc

$$\mathrm{OM}.\mathrm{OM}' = d^2 - \mathrm{R}^2,$$

en appelant d la longueur de la tige OA qui donne la distance de O au centre A de la circonférence. Comme d et R sont constants, le produit OM . OM′ est une constante. L'appareil réalise donc une inversion ou transformation par rayons vecteurs réciproques de module $k^2 = d^2 - R^2$. Si l'on fait décrire à M une ligne, un crayon fixé en M′ décrira la ligne inverse.

Mais il faut encore remarquer que, dans cet appareil, la transformation est limitée à une portion du plan comprise entre deux circonférences concentriques. En effet OM est évidemment inférieur ou égal à OA + AM ou à $d + R$ et OM′ est supérieur à OA — AM′ ou à $d - R$. Les points M et M′ sont donc situés dans la couronne comprise entre les deux cercles décrits de O comme centre avec $d + R$ et $d - R$ comme rayons : l'appareil ne permet de réaliser la transformation que pour les points de cette couronne.

Par exemple, si M′ décrit, dans cette couronne, un arc d'une circonférence passant par O, le point M décrit dans cette même couronne, une portion de droite. On a donc un moyen de transformer rigoureusement le mouvement d'un point sur un arc de cercle en un mouvement rectiligne.

Nous avons, dans ce qui précède, supposé $d > R$; si d était inférieur à R, l'appareil donnerait une transformation par inversion dans laquelle les points M et M′ seraient de part et d'autre de O.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE I

1. Une circonférence roule dans l'intérieur d'une circonférence fixe de rayon double. Démontrer qu'un point M de la circon-

férence mobile décrit un diamètre de la circonférence fixe. En supposant que la droite qui joint les centres des deux circonférences tourne avec une vitesse angulaire constante donnée, calculer la vitesse du point M à un instant t.

2. On veut transformer un mouvement de rotation autour d'un axe fixe en un mouvement de rotation autour d'un axe parallèle, de telle façon que le rapport $\frac{\omega_1}{\omega}$ des deux vitesses angulaires ait pour valeur algébrique

$$\frac{\omega_1}{\omega} = -\frac{144}{49};$$

comment peut-on réaliser cette transformation à l'aide de deux arbres intermédiaires, en n'admettant pas de roues dentées de plus de 120 et de moins de 8 dents.

Réponse. — Ce problème comporte un grand nombre de solutions ; comme on a

$$\frac{\omega_1}{\omega} = -\frac{2^4 . 3^2}{7^2},$$

on aura une solution en cherchant à mettre ce rapport sous la forme indiquée au n° 7, pour le cas de deux arbres intermédiaires, chacun des trois facteurs du numérateur et du dénominateur étant égal au moins à 8 et au plus à 120. On a, par exemple, une solution en prenant

$$\frac{\omega_1}{\omega} = -\frac{40 . 40 . 9}{14 . 14 . 25};$$

une autre en prenant

$$\frac{\omega_1}{\omega} = -\frac{24 . 24 . 9}{14 . 14 . 9}.$$

Etc., etc.

3. Conditions pour que, dans le système bielle et manivelles du n° 9, une manivelle soit à révolution complète.

Il faut, pour cela, que le quadrilatère OABO′ (*fig.* 13) puisse être construit quelle que soit la valeur de l'angle O′OA α.

4. *Inverseur de Hart* — Cet inverseur a seulement *quatre tiges.* Soit (*fig.* 20) un contre parallélogramme articulé, c'est-à-dire quatre tiges articulées formant un quadrilatère concave dans lequel AB = CD, AD = BC. Prenons sur ces tiges quatre points O, M, M′, O′ qui, pour une certaine configuration du contre-parallélogramme, soient sur une droite parallèle aux lignes DB et AC.

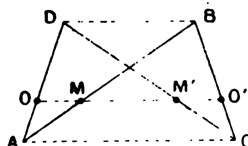


Fig. 20.

On démontrera que, si l'on déforme le contre-parallélogramme en fixant le point O, les points M et M′ restent alignés avec O et le produit des segments OM, OM′ reste *constant.* Les points M et M′ décrivent alors des figures inverses.

CHAPITRE II

FORCES APPLIQUÉES A UN POINT MATÉRIEL

DYNAMIQUE ET STATIQUE DU POINT

§ I. — PRINCIPES FONDAMENTAUX

14. **Axes fixes.** — On rapporte les positions de tous les corps à un système d'axes que l'on appelle, par définition, *axes absolument fixes* : ce système d'axes est un trièdre *ayant son sommet au centre de gravité du système solaire* (point placé très près du centre du Soleil) *et ses arêtes dirigées vers trois des étoiles appelées étoiles fixes.*

15. **Point matériel.** — Afin de commencer par le problème le plus simple, on étudie d'abord le mouvement d'une portion de matière assez petite pour qu'on puisse, sans erreur sensible, déterminer sa position comme celle d'un point géométrique. Une telle portion de matière s'appelle un *point matériel.* On considère

ensuite les corps comme formés par la réunion d'un très grand nombre de points matériels.

En même temps qu'il change de position un point matériel peut tourner et se déformer ; mais on ne s'occupe, dans ce qui suit, que de la position du point et non de la manière dont il peut tourner et se déformer.

L'observation et l'expérience montrent que les points matériels agissent les uns sur les autres : ainsi les points matériels qui constituent un corps appelé *solide* agissent les uns sur les autres de façon à maintenir, à peu de chose près, la forme du corps quand on cherche à le déformer ; deux points électrisés s'attirent ou se repoussent ; etc.

16. **Principe de l'inertie.** — *Un point matériel livré à lui-même a, par rapport aux axes fixes, une accélération nulle.* D'après ce principe, un point matériel livré à lui-même est, ou bien immobile, ou bien animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Les deux cas peuvent se présenter suivant les conditions initiales dans lesquelles on place le point : 1° on peut supposer le point livré à lui-même sans vitesse, alors il reste immobile ; 2° on peut supposer qu'on livre le point à lui-même après lui avoir communiqué, par un procédé quelconque, une vitesse V, par exemple après l'avoir lancé avec la main ; alors il conserve indéfiniment cette vitesse en grandeur, direction et sens et il prend un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse V.

17. **Force.** — D'après le principe de l'inertie, si l'on observe un point matériel possédant une accélération, ce point n'est pas livré à lui-même; d'autres points agissent sur lui. L'accélération que possède le point est l'effet d'une cause extérieure à lui; cette cause est ce qu'on appelle une *force*. L'effet d'une force sur un point est donc de lui imprimer à chaque instant une certaine accélération γ. On ne s'occupe pas en Mécanique et en Physique de l'essence des forces qu'il est impossible de pénétrer; on cherche, simplement, à prévoir et à calculer les effets des forces. Dans ce but, on caractérise et l'on mesure chaque force par l'effet qu'elle produit sur un point matériel, c'est-à-dire par l'accélération qu'elle lui imprime.

18. **Masse.** — Quand un point matériel déterminé, soumis à une force, possède, à un instant t, une accélération γ, on représente la force qui agit sur lui à cet instant par un vecteur F ayant pour origine le point, pour direction et sens la direction et le sens de l'accélération γ et pour longueur le produit de γ par un coefficient positif m, caractéristique du point et appelé *masse* du point :

$$F = m\gamma.$$

Une force est donc représentée par un *vecteur*; on dit qu'elle a pour point d'application le point matériel sur lequel elle agit, qu'elle a pour direction et sens la direction et le sens du vecteur qui la représente, enfin

qu'elle a pour intensité le nombre qui mesure la longueur du vecteur. On peut résumer ce qui précède en disant qu'une force F, agissant sur un point matériel, lui imprime une accélération γ, liée à F par la relation géométrique

$$(F) = m(\gamma),$$

vraie en grandeur, direction et sens.

Quand par la suite nous parlerons d'une force F appliquée à un point, il faudra toujours entendre par là un certain vecteur défini en grandeur, direction et sens.

Remarque importante. — Ces faits ne sont rigoureusement vrais que pour les mouvements rapportés au système d'axes fixes indiqué. Mais ce n'est qu'en Astronomie ou dans le cas de quelques expériences tout à fait exceptionnelles (comme le pendule de Foucault, par exemple) que l'on a besoin de se servir de ce système d'axes. Dans l'immense majorité des cas, il est permis de prendre un système d'axes lié à la Terre : il n'en résulte aucune inexactitude appréciable, comme le montre l'observation, d'accord avec la théorie des mouvements relatifs.

19. **Pesanteur; poids : 1° Point matériel.** — Un point matériel lancé dans le vide prend par rapport à la Terre une accélération g, constante en un même lieu, dirigée suivant la verticale descendante du lieu. On dit que cette accélération est due à la pesanteur ;

elle varie avec la latitude et l'altitude ; à Paris, elle est représentée par le nombre 981, l'unité de longueur étant le centimètre, et l'unité de temps étant la seconde de temps moyen. On en conclut qu'un point pesant est, en un lieu déterminé, soumis à une force constante dirigée suivant la verticale descendante ; cette force s'appelle le *poids absolu* du point. L'intensité du poids absolu d'un point de masse m est liée à l'accélération g imprimée par ce poids au point, par la relation

$$p = mg,$$

qui nous servira plus loin à la mesure des masses. Ce poids absolu varie, comme g, avec la latitude et l'altitude.

2° **Corps quelconque.** — On regarde un corps quelconque comme formé par la réunion d'un très grand nombre de points matériels. La masse totale M d'un corps est la somme des masses m_1, m_2, . . . , m_n des points matériels qui le constituent

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n.$$

Les corps que l'on a à considérer, en Mécanique appliquée ou en Physique, ont des dimensions assez petites pour que la valeur de l'accélération g, due à la pesanteur, soit la même en grandeur, direction et sens dans toute leur étendue. Les poids absolus des divers points matériels constituant un de ces corps sont alors

$$p_1 = m_1 g, \quad p_2 = m_2 g, \quad \ldots, \quad p_n = m_n g;$$

leur somme

$$P = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$$

s'appelle le *poids absolu* du corps au lieu considéré; d'après les valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ en fonction des masses, on a immédiatement

$$P = (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)g = Mg.$$

Le poids absolu d'un corps en un lieu est donc le produit de la masse totale du corps par l'accélération due à la pesanteur en ce lieu.

Quand un point matériel est retenu par un obstacle, il peut rester immobile; par exemple, un point pesant placé sur une table ou sur la main de l'observateur reste immobile; cela tient à ce que l'obstacle exerce aussi sur le point une *réaction* ou *force*, et cette force empêche le poids absolu de mettre le point en mouvement.

Le point matériel exerce alors sur l'obstacle une *action*, ou *force pressante*, ou *pression totale*, égale à son poids absolu. C'est ainsi qu'on peut, très grossièrement, comparer entre eux les poids absolus des corps par la sensation de l'effort musculaire nécessaire pour les empêcher de tomber.

20. **Les trois unités fondamentales.** — En Géométrie on n'emploie qu'*une unité fondamentale*, l'unité de longueur, d'où l'on déduit ensuite les unités *dérivées* de surface et de volume.

En Cinématique on se sert de *deux unités fondamentales* : l'unité de longueur et celle de temps, et l'on en déduit les unités employées aux mesures des autres quantités, vitesse, accélération.

Enfin, en Mécanique, il faut employer *trois unités fondamentales*, les unités de longueur, de temps et une troisième unité qui est, suivant les deux systèmes en usage, une unité de masse ou une unité de force.

21. **Système** C. G. S. — Ce système repose sur ce fait que les masses des corps sont proportionnelles à leurs poids absolus en un même lieu. En effet, soient $m, m', m'', \dots$ les masses de certains corps ; $p, p', p'', \dots$ leurs poids absolus en un lieu où l'accélération due à la pesanteur est g : on a

$$p = mg, \qquad p' = m'g, \qquad p'' = m''g, \qquad \dots ;$$

les quantités $p, p', p'', \dots$ sont proportionnelles à $m, m', m'', \dots$.

Si

$$p = p', \qquad m = m' ;$$

et si

$$p = p' + p'', \qquad m = m' + m''.$$

Dès lors on peut, à l'aide d'une balance, comparer entre elles les masses des corps. Lorsqu'on pèse un corps dans le vide, par la méthode de double pesée, on le place dans un plateau d'une balance, on lui fait équilibre avec une tare ; puis on enlève le corps et on

le remplace par des poids marqués, de façon à rétablir l'équilibre. Dans ces conditions, *le corps a même masse que les poids marqués*. En effet, il est évident que le corps et les poids marqués, faisant successivement équilibre à la même tare, exercent la même action sur le plateau ; le corps et les poids marqués ont donc même poids absolu et par suite même masse.

Prenons alors comme unité de masse la masse d'un centimètre cube d'eau au maximum de densité ; cette unité s'appelle le *gramme-masse*. Tous les corps qui, dans la méthode de la double pesée, font équilibre à la même tare qu'un poids marqué 1 gramme, ont même masse que ce poids marqué, c'est-à-dire même masse qu'un centimètre cube d'eau ; ils ont donc une masse 1. Tous les corps faisant équilibre à la même tare qu'un poids marqué 2 grammes ont pour masse 2, etc. Tous les corps faisant équilibre à la même tare qu'un poids marqué n grammes (n entier ou fractionnaire) ont une masse mesurée par le nombre n.

Conformément aux principes adoptés par la Commission britannique en 1871 et par le Congrès des Électriciens en 1881, on a pris comme unités fondamentales : pour la longueur, le centimètre C ; pour la masse, la masse du gramme G ; pour le temps, la seconde de temps moyen S.

Ce système d'unités est le système C. G. S. (centimètre, gramme-masse, seconde).

Unité de force dans le système C. G. S. Dyne. —

Une fois qu'on sait mesurer les longueurs, les masses et les temps, on sait mesurer les forces d'après la relation fondamentale

$$F = m\gamma$$

qui lie l'intensité de la force à l'accélération qu'elle imprime à un point de masse m. L'unité de force sera la force exprimée par le nombre 1 ; pour avoir $F = 1$ il suffit de faire $m = 1$, $\gamma = 1$.

Dans le système C. G. S. l'unité de force est la force qui, agissant sur l'unité de masse, un gramme-masse, lui imprime l'accélération 1, les unités de longueur et de temps étant le centimètre et la seconde. Cette unité de force s'appelle la *dyne*. Elle est très petite par rapport aux forces que l'homme peut développer avec son système musculaire. Ainsi, à Paris, le poids absolu de 1 gramme-masse (centimètre cube d'eau) est 981 dynes, car ce poids p imprime à la masse 1 une accélération de 981 unités ; on a dès lors

$$p = 1 \times 981 \text{ dynes.}$$

La dyne est donc un poids de l'ordre de grandeur du *milligramme-poids*. L'effort musculaire qu'on fait en soutenant un poids de 1^{kg} est de 981 000 dynes, ou sensiblement une *mégadyne* (1 000 000 dynes).

Poids commerciaux. — Il résulte de ce qui précède que les quantités appelées *poids* dans le commerce ne sont pas des poids, mais des masses ; le poids com-

mercial d'un corps en grammes n'est autre chose que sa masse dans le système C. G. S.

22. **Deuxième système.** — On emploie fréquemment, dans les applications industrielles, un deuxième système d'unités dans lequel on considère, comme unités fondamentales, les unités de *longueur*, de *force* et de *temps*, l'unité de masse devenant alors une unité dérivée. Ce système est le suivant :

Unité de longueur. .	mètre
Unité de force. . . .	kilogramme-force
Unité de temps. . .	seconde

le kilogramme-force ou kilogramme-poids étant le poids absolu d'un litre d'eau à Paris. Il est indispensable d'ajouter, dans la définition de cette unité de force, que le poids absolu est pris en un lieu déterminé, Paris par exemple, car le poids absolu d'un corps change avec la latitude et l'altitude.

Unité de masse dans ce système. — Dans ce système la masse d'un corps est définie par la formule

$$m = \frac{p}{g},$$

p étant le poids absolu évalué en kilogrammes-forces et g l'accélération due à la pesanteur. Si l'on fait $p = g$, on a $m = 1$. L'unité de masse est donc la masse d'un corps dont le poids absolu est g kilo-

grammes-forces. A Paris, g étant, avec ce choix d'unités fondamentales, égal à 9,81, l'unité de masse sera la masse de 9^{l},81 d'eau distillée à 4°.

L'inconvénient de ce système est que l'unité de force, le kilogramme-force, est une quantité dont la définition exige l'indication d'un lieu déterminé à la surface de la Terre; de plus, la masse d'un corps, qui est une qualité physique inhérente à ce corps, est exprimée par des nombres différents, suivant que le kilogramme-force est défini en un lieu ou l'autre de la Terre. C'est ce que l'on évite dans le système C. G. S., pour lequel la définition des unités n'exige l'indication d'aucun lieu déterminé.

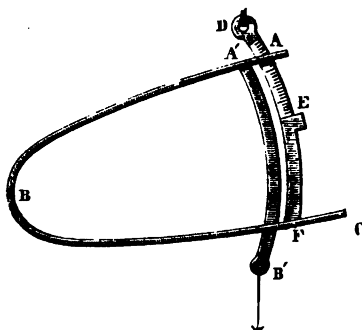
Gramme-force. — Le gramme-force est le poids absolu d'un centimètre cube d'eau à Paris; c'est la millième partie du kilogramme-force que nous venons de définir.

23. **Mesure statique des forces.** — Le système de mesures qui consiste à prendre un poids absolu pour l'une des unités fondamentales a été le premier employé. Cela tient à ce que l'homme s'est d'abord fait une idée de la force par l'effort qu'il est obligé de faire pour supporter un fardeau; d'où la comparaison des forces aux poids. Cette comparaison peut se faire d'une manière plus précise à l'aide du *dynamomètre* (*fig.* 21). Prenons un ressort de forme quelconque, dont la flexion peut être mesurée par une graduation;

suspendons à ce ressort, à Paris, des poids de 1^{kg}, de 2^{kg}, etc. ; nous pourrons noter les flexions correspondantes.

Alors pour trouver l'intensité d'une force quel-

Fig. 21.



conque agissant sur un point matériel, nous pourrons fixer le point à l'extrémité du ressort, convenablement orienté, et noter la flexion correspondante ; nous aurons la mesure de la force en kilogrammes-forces.

24. **Principe de l'indépendance des effets des forces. Composition des forces appliquées à un point.** — Lorsque plusieurs forces agissent simultanément sur un point matériel, *l'accélération qu'il prend, à chaque instant, est la somme géométrique des accélérations que chacune des forces lui imprimerait à cet instant si elle était seule.*

On déduit immédiatement de ce principe la composition des forces appliquées à un point matériel.

L'accélération imprimée à un point, à un instant quelconque, par des forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$, *en nombre quelconque, est la même que si le point était sollicité à cet instant par une force unique* F *égale à leur somme géométrique*. Considérons des forces qui, agissant séparément sur le même point M, lui communiqueraient respectivement des accélérations $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Les valeurs de ces forces à l'instant t sont en grandeur, direction et sens

$$(F_1) = m(\gamma_1), \qquad (F_2) = m(\gamma_2), \qquad \ldots, \qquad (F_n) = m(\gamma_n).$$

Lorsque toutes ces forces agissent en même temps sur le point M, elles lui communiquent une accélération γ égale à la somme géométrique de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$

$$(\gamma) = (\gamma_1) + (\gamma_2) + \ldots + (\gamma_n).$$

La valeur F à l'instant t de la force unique qui communiquerait au point cette même accélération γ (*fig.* 22) est

$$(F) = m(\gamma).$$

Les figures formées par les points $F_1, F_2, \ldots, F_n$, F d'une part, et les points $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \gamma$ d'autre part sont donc homothétiques par rapport au point M, le rapport d'homothétie étant m ; comme γ est la somme géométrique de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, la force F est la somme géométrique de $F_1, F_2, \ldots, F_n$:

$$(F) = (F_1) + (F_2) + \ldots + (F_n);$$

le théorème est donc démontré.

Cette force unique F, qui produit la même accélération que les autres agissant simultanément, s'appelle la *résultante* des forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$, les forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ elles-mêmes étant les *composantes*.

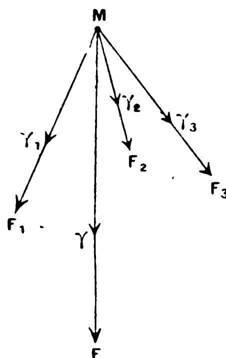


Fig. 22.

On peut alors, toutes les fois que plusieurs forces agissent simultanément sur un point, les remplacer par leur résultante. Cette opération s'appelle *composition des forces appliquées à un point.* Comme elle est identique à celle qui consiste à faire la somme géométrique des vecteurs représentant les forces, on voit qu'on peut lui appliquer tout ce que nous avons dit de la composition des vecteurs.

La résultante de deux forces est la diagonale du parallélogramme construit sur ces forces.

La résultante de trois forces est la diagonale du parallélépipède construit sur ces forces ; etc.

La projection de la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un point, sur un axe, est égale à la somme des projections des composantes.

Inversement, il peut être utile de remplacer une

force unique F, appliquée à un point, par d'autres $F_1, F_2, \ldots, F_n$ dont elle serait la résultante : cette opération, appelée *décomposition d'une force en forces concourantes,* est identique à l'opération de la décomposition d'un vecteur. On pourra donc lui appliquer tout ce qui a été dit à son sujet.

25. **Résumé ; équation fondamentale de la Mécanique.** — En résumé, imaginons un point sollicité par des forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ en nombre quelconque. Soient F la somme géométrique ou résultante de ces forces à un instant t, γ l'accélération de ce point au même instant, m sa masse ; *les deux vecteurs* F *et* γ *ont même direction et même sens et leurs grandeurs sont liées par la relation*

$$F = m\gamma.$$

C'est là l'équation fondamentale de la Mécanique.

§ II. — ÉQUILIBRE D'UN POINT LIBRE

26. **Équilibre d'un point.** — Plusieurs forces appliquées à un point se font équilibre lorsque, le point étant au repos, ces forces ne lui impriment aucun mouvement. L'accélération γ que ces forces réunies impriment au point est alors *nulle.*

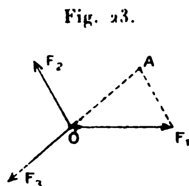
Donc, la résultante $F = m\gamma$ *de ces forces est nulle.*

Cette condition *nécessaire* de l'équilibre est *évidemment suffisante,* d'après le principe de l'inertie.

27. **Cas particulier de deux ou trois forces : 1° Deux forces.** — Soit un point libre sollicité par deux forces F_1 et F_2 ; pour qu'il soit en équilibre, il faut et il suffit que ces deux forces soient égales et opposées.

2° **Trois forces.** — Supposons un point O sollicité par trois forces (*fig.* 23). Pour qu'elles se fassent équilibre, il faut et il suffit que leur somme géométrique soit nulle, c'est-à-dire qu'elles soient parallèles et égales aux côtés d'un triangle OF_1A parcourus dans un même sens de circulation. On peut dire aussi en s'appuyant sur ce que, dans un triangle, chaque côté est proportionnel au sinus de l'angle des deux autres, qu'il faut et il suffit :

Fig. 23.



1° Que les trois forces concourantes soient dans un même plan ;

2° Que chacune d'elles soit à l'extérieur de l'angle des deux autres ;

3° Que l'intensité de chacune d'elles soit proportionnelle au sinus de l'angle des deux autres

$$\frac{F_1}{\sin(F_2 F_3)} = \frac{F_2}{\sin(F_3 F_1)} = \frac{F_3}{\sin(F_1 F_2)}.$$

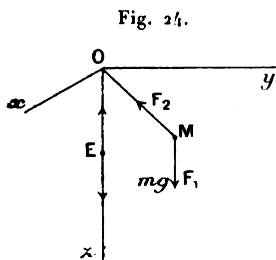
28. **Équations d'équilibre d'un point libre.** — Appelons F_1, F_2, . . . , F_n les forces appliquées au point et projetons-les sur trois axes Ox, Oy, Oz. Appe-

lons X_1, Y_1, Z_1 les projections de F_1; X_2, Y_2, Z_2 celles de F_2; ...; X_n, Y_n, Z_n celles de F_n. La résultante F de toutes ces forces a pour projection, sur chacun des axes, la somme des projections des composantes. Pour que le point soit en équilibre, il faut et il suffit que cette résultante soit *nulle,* c'est-à-dire que la somme des projections des composantes sur chacun des axes le soit. On a ainsi les trois *équations d'équilibre* d'un point libre

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 0,$$
$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = 0,$$
$$Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = 0.$$

29. **Exemple : Équilibre d'un point pesant attiré par un centre fixe O proportionnellement à la distance.** — Soient M une position du point, m sa masse. Le point est pesant, c'est-à-dire qu'il est sollicité par une force verticale descendante F_1 d'intensité mg (*fig.* 24). En outre il est attiré par O proportionnellement à la distance OM : cela veut dire qu'il est sollicité par une deuxième force F_2 dirigée de M vers O ayant pour intensité k. OM, où k est une constante qui représente l'intensité de l'attraction qu'exercerait le point O sur le point M à l'unité de distance. Pour que le point soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante ou somme géométrique

Fig. 24.



de ces deux forces F_1 et F_2 soit nulle. Il faut et il suffit, pour cela, que F_1 et F_2 soient égales et opposées. Comme F_1 est verticale descendante, F_2 doit être verticale ascendante, ce qui montre que la position d'équilibre cherchée E est sur la verticale Oz du point O, au-dessous de O. En outre, F_1 devant avoir même intensité que F_2, on aura

$$mg = k \cdot \text{OE}, \qquad \text{OE} = \frac{mg}{k}.$$

Le point E est ainsi entièrement déterminé.

On retrouvera facilement le même résultat en employant les équations d'équilibre.

EXERCICES SUR LES §§ I ET II

1. On sait que, à la surface de la Lune, l'accélération que prend un point pesant abandonné à lui-même et tombant sur la Lune est

$$g' = 0{,}174g = 170,$$

l'unité de longueur étant le centimètre et l'unité de temps la seconde.

Quel est, en dynes, le poids absolu d'un centimètre cube d'eau à la surface de la Lune ?

Quel est, en kilogrammes-forces, le poids absolu d'un litre d'eau à la surface de la Lune ?

2. Trois points fixes A, B, C, en ligne droite, attirent un point M en raison inverse de la distance, l'attraction de chacun de ces points sur le point M étant 1 dyne quand le point M en est à 1^{cm} de distance. Déterminer les positions d'équilibre.

Réponse. — Le point est sollicité par trois forces F_1, F_2, F_3, dirigées suivant MA, MB et MC et exprimées en dynes par

$$F_1 = \frac{1}{\text{MA}}, \qquad F_2 = \frac{1}{\text{MB}}, \qquad F_3 = \frac{1}{\text{MC}},$$

les trois distances MA, MB, MC étant exprimées en centimètres. Tant que le point M n'est pas sur la droite ABC, l'équilibre est impossible, car les trois forces F_1, F_2, F_3 ont évidemment une

Fig. 25.



résultante non nulle dirigée vers un point de cette droite. Les positions d'équilibre E sont donc sur ABC. Pour les déterminer, prenons la droite ABC pour axe Ox et appelons a, b, c les abscisses de A, B, C, x celle de E. La valeur algébrique X_1 de la force attractive $F_1 = \frac{1}{EA}$ du point A sur E est $\frac{1}{a - x}$.

De même, pour les attractions de B et C sur E, on a

$$X_2 = \frac{1}{b - x}, \qquad X_3 = \frac{1}{c - x}.$$

Pour que la position E soit une position d'équilibre, il faut et il suffit que la résultante $X_1 + X_2 + X_3$ soit nulle. On a ainsi, pour déterminer x, l'équation

$$\frac{1}{a - x} + \frac{1}{b - x} + \frac{1}{c - x} = 0;$$

si l'on suppose $a < b < c$, on trouve deux positions d'équilibre, l'une entre A et B, l'autre entre B et C.

On pourra vérifier que les abscisses des positions d'équilibre sont les racines de la dérivée du polynome

$$(x - a)(x - b)(x - c)$$

ayant pour racines les abscisses des points attirants.

3. Un point est attiré par deux centres fixes A et A′ en raison inverse du carré de la distance ; déterminer ses positions d'équilibre.

Réponse. — En appelant k et k' l'intensité de l'attraction de chacun des points A et A′ à l'unité de distance, on trouve une

position d'équilibre E, située entre A et A', déterminée par la condition

$$\frac{EA}{EA'} = \sqrt{\frac{k}{k'}}.$$

4. Un point M est attiré par trois points fixes A, B, C proportionnellement à la distance, l'attraction de chacun des points sur le point M à l'unité de distance ayant la même intensité. Position d'équilibre.

Réponse. — Une position d'équilibre au point de rencontre des médianes du triangle ABC.

5. Un point M est sollicité par trois forces dirigées suivant les perpendiculaires abaissées de M sur les trois côtés d'un triangle fixe ABC et inversement proportionnelles aux longueurs de ces perpendiculaires. Positions d'équilibre.

6. Un point situé dans le plan d'un triangle fixe ABC est sollicité par trois forces *constantes* dirigées perpendiculairement aux trois côtés du triangle et vers ces côtés.

Que doivent être ces forces pour que le point puisse être en équilibre ?

Combien existe-t-il alors de positions d'équilibre ?

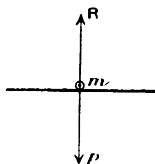
Dans quelle région du plan sont-elles situées ?

Réponse. — Il faut que les forces soient proportionnelles aux côtés correspondants du triangle. Il existe alors une infinité de positions d'équilibre qui sont tous les points de l'intérieur du triangle. Cela résulte immédiatement des conditions du nº 27, relatives à trois forces appliquées à un même point.

§ III. — ÉQUILIBRE D'UN POINT MATÉRIEL NON LIBRE

30. **Équilibre d'un point pesant sur un plan incliné. Frottement.** — Quand un point pesant est posé sans vitesse initiale sur un plan horizontal, comme un objet sur une table, il reste immobile. Cela tient à ce que son poids p est tenu en équilibre par la résistance de la table. D'une façon plus précise, la table développe une résistance qui est une certaine force R, égale et opposée (*fig.* 26) au poids du point ; le point matériel, étant alors sollicité par deux forces égales et opposées, est en équilibre.

Fig. 26.

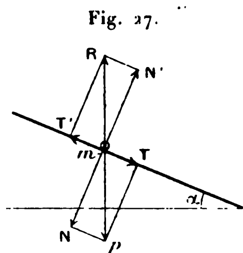


Supposons maintenant que l'on place un point pesant, sans vitesse, sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizon. Nous supposons que ce point peut seulement glisser et non rouler sur le plan : il faut donc se le représenter comme un petit corps solide reposant par une face plane sur le plan et non comme une bille (*fig.* 27). L'expérience montre que le point reste immobile tant que l'angle α est suffisamment petit, mais qu'il se met à glisser quand l'angle α surpasse un certain angle limite φ : cet angle dépend de la nature de la surface du plan et de la nature du petit corps solide constituant le point, mais il ne dépend pas du poids de ce point ; par exemple, si le plan est

une plaque de fonte et si les petits corps qu'on place sur lui sont en fer, l'angle φ est d'environ 10°. On dit que cet angle est l'*angle de frottement* du point sur le plan : ainsi, dans l'exemple cité, on dira que l'angle de frottement du fer sur la fonte est de 10°. Plus le plan est poli, plus l'angle limite φ est petit. Si, au lieu de prendre une plaque de fonte sèche, on la lubrifie avec de l'huile, elle devient *plus glissante*, l'angle φ devient plus petit que 10°.

On se rend compte de l'existence de cet angle, en prenant un plan matériel horizontal dont la surface est partout dans le même état, et en plaçant dessus de petits corps de même substance, mais de poids différents. Si l'on incline le plan sans secousse, les corps restent d'abord immobiles, puis ils se mettent tous à glisser au moment où l'inclination α dépasse l'angle limite φ. On a ainsi un moyen, d'ailleurs peu précis, de déterminer l'angle de frottement de deux substances.

Fig. 27.



Analysons maintenant ce phénomène. Le point étant en équilibre sur le plan incliné (*fig.* 27), le plan développe une résistance ou réaction R qui fait équilibre au poids p. Or ce poids p fait, avec la normale mN au plan, un angle égal à α. On peut donc dire que *le plan développe une résistance qui détruit le poids p*,

pourvu que l'angle de ce poids avec la normale au plan soit moindre qu'un certain angle déterminé φ, qui est l'angle de frottement du corps sur le plan.

Décomposons le poids p en deux forces : l'une N, normale au plan, l'autre T, dirigée suivant la ligne de plus grande pente. La force N ne fait qu'appuyer le corps contre le plan, la force T tend à le faire glisser. Mais, comme nous venons de le voir, le glissement ne se produit pas tant que l'angle α de p avec la normale est moindre que φ, ou, comme α et φ sont aigus, tant que

$$\operatorname{tang} \alpha \leqslant \operatorname{tang} \varphi.$$

Or le triangle $m\mathrm{N}p$, dans lequel $m\mathrm{N} = \mathrm{N}$ et $\mathrm{N}p = \mathrm{T}$, donne

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{N}}.$$

Donc le glissement ne se produit pas tant que

$$\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{N}} \leqslant \operatorname{tang} \varphi ;$$

il se produit quand

$$\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{N}} > \operatorname{tang} \varphi.$$

La quantité tang φ s'appelle *coefficient de frottement, au départ, du point matériel sur le plan*. On désigne ordinairement ce coefficient par f,

$$f = \operatorname{tang} \varphi.$$

Ce coefficient étant connu, on voit que le glissement ne se produit pas tant que

$$T \leqslant fN.$$

On a ainsi les conditions d'équilibre d'un point pesant sur un plan incliné avec frottement.

Réaction du plan. — Nous avons dit que, si le point est en équilibre, le plan produit une résistance ou réaction qui est une force R, appliquée au point en équilibre, égale et opposée au poids. Cette force R fait donc aussi avec la normale un angle moindre que φ. Si on la décompose en une composante normale N' (*fig.* 27) et une composante T' située dans le plan, N' est égale et opposée à N, T' égale et opposée à T. On a donc dans l'équilibre

$$T' \leqslant fN'.$$

31. **Équilibre d'un point sur un plan sous l'action de forces quelconques.** — Soit un plan fixe, un point *m* pouvant glisser sur ce plan, ce point étant sollicité par différentes forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$, parmi lesquelles se trouve le poids ; soit F la résultante de ces forces. Pour que le point supposé immobile ne glisse pas sur le plan, il faut et il suffit :

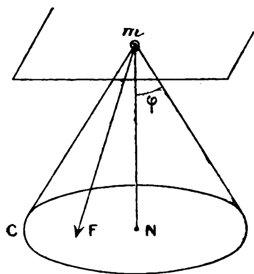
1° Que la force F soit dirigée de façon à appliquer le point contre le plan ;

2° Qu'elle fasse avec la normale au plan un angle

moindre que l'angle de frottement φ du point sur le plan.

Supposons qu'on décrive un cône de révolution (*fig.* 28) ayant pour sommet m, pour axe la normale mN au plan et pour demi-angle au sommet l'angle φ. Pour que le point m soit en équilibre, il faut et il suffit que la force F soit *dans l'intérieur de ce cône*. On appelle ce cône le *cône de frottement*.

Fig. 28.



Si l'on décompose F en une force N normale au plan et une force T parallèle au plan, pour qu'il y ait équilibre il faut et il suffit que

$$T \leqslant fN.$$

Quand l'équilibre a lieu, le plan produit sur le point une réaction R égale et opposée à F : en décomposant cette réaction en une force N′ normale au plan et une force T′ parallèle au plan, N′ est égale et opposée à N, T′ égale et opposée à T ; donc, dans l'équilibre, les deux composantes de la réaction du plan vérifient l'inégalité

$$T' \leqslant fN'.$$

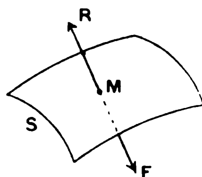
Ces inégalités expriment ce qu'on appelle les *lois du frottement à l'état d'équilibre*.

Remarque. — Comme cas limite on considère quel-

quefois le cas idéal où il n'y aurait pas de frottement, c'est-à-dire le cas où le plan serait parfaitement poli : dans ce cas, le coefficient de frottement f et l'angle φ sont nuls, et, pour que le point m soit en équilibre, il faut et il suffit que la force F soit *normale* au plan et dirigée de façon à appliquer le point sur le plan.

32. **Point mobile sans frottement sur une surface fixe.** — Soient une surface fixe donnée S (*fig.* 29) et, sur cette surface, un point mobile M sollicité par des forces données dont F est la résultante. Pour que le point soit en équilibre, *il faut que cette résultante* F, si elle n'est pas nulle, *soit normale à la surface*. Pour le montrer, rappelons-nous que le point est supposé pouvoir glisser sur la surface *sans frottement*, c'est-à-dire que si le point supposé sans vitesse occupe une certaine position sur la surface, dès qu'une force dirigée tangentiellement à la surface vient à agir sur lui, elle le fait *glisser*, quelque petite qu'elle soit. Dans ces conditions, si la force F n'est pas nulle et n'est pas normale, on peut la décomposer en deux, l'une normale qui presse le point sur la surface ou qui tend à l'en arracher, et l'autre tangentielle *qui le fait glisser* : donc l'équilibre n'a pas lieu. Pour qu'il ait lieu, la force F doit donc être ou *nulle* ou *normale à la surface*.

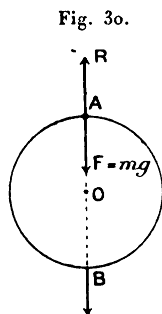
Fig. 29.



Cette condition nécessaire est suffisante, à condition que le point soit lié à la surface de façon qu'il ne puisse la quitter ni d'un côté ni de l'autre : en effet, si la force F est normale, elle tend à presser le point supposé sans vitesse contre la surface ou à l'en arracher ; mais, comme le point ne peut pas quitter la surface, la force F est détruite par la résistance ou réaction R de la surface et le point reste immobile : il est en équilibre.

Mais si le point est simplement *posé* sur la surface, d'un seul côté, comme un objet posé sur une table, la condition indiquée n'est plus *suffisante* pour l'équilibre ; il faut en outre que la force, supposée normale, soit dirigée de façon à *appliquer le point contre la surface*. Imaginons, par exemple, une boule sphérique en bois parfaitement polie et posons, sur cette boule, un point pesant sans vitesse (*fig.* 30). La force F agissant sur le point est le poids : pour qu'il y ait équilibre il faut que le poids soit normal à la surface ou, comme les normales à une sphère passent par le centre, que la direction du poids prolongée passe par le centre O. Il existe deux points A et B de la sphère pour lesquels cette condition est remplie, le point le plus haut A et le point le plus bas B. Mais il est évident que ces deux points ne sont pas, tous deux, des positions d'équilibre :

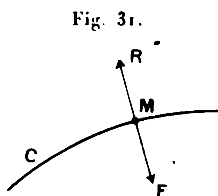
Fig. 30.



en A le poids applique le point contre la boule : c'est une position d'équilibre ; en ce point la boule exerce sur le mobile une action R égale et opposée au poids $F = mg$. En B, au contraire, le point mobile n'est pas en équilibre, car le poids tend à arracher le mobile de la boule et celle-ci ne le retient pas.

33. **Point mobile sans frottement sur une courbe fixe.** — Imaginons un point matériel M, mobile sans frottement sur une courbe fixe donnée C. On peut se représenter, approximativement, cette liaison en imaginant une sphère très petite placée à l'intérieur d'un tube très fin dans lequel elle peut glisser sans frottement. On pourrait aussi imaginer un anneau très petit enfilé dans un fil de fer fixe ayant une forme courbe donnée. La petite sphère et le petit anneau donnent l'image d'un point matériel mobile sur une courbe fixe. Sur ce point, on fait agir des forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ en nombre quelconque et l'on demande les positions d'équilibre du point. Soit F la résultante des forces données appliquées au point (*fig.* 31). On voit, comme dans le cas d'un point pouvant glisser sur une surface, que, s'il n'y a pas de frottement et si la force F n'est pas normale à la courbe, elle fait glisser le point et l'équilibre n'a pas lieu. Si elle est nulle ou normale, l'équilibre a lieu ; la force tend

Fig. 31.



alors à arracher le point de la courbe et elle est détruite par la résistance de la courbe, égale et opposée à F.

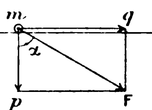
On obtient donc les positions d'équilibre en cherchant les positions du point dans lesquelles la résultante F *est nulle ou normale à la courbe* C.

EXERCICES SUR LE § III

1. Équilibre limite d'un point pesant sur un plan horizontal sous l'action d'une force horizontale.

Réponse. — Soit p le poids du point, q la force horizontale appliquée au point (*fig.* 32). Ces deux forces ont une résultante F : pour que le point reste en équilibre, il faut et il suffit que F fasse avec la normale un angle α moindre que φ, c'est-à-dire que l'on ait

Fig. 32.



$$\frac{q}{p} \leqslant \text{tang}\,\varphi, \qquad q \leqslant fp,$$

f désignant le coefficient de frottement.

2. Sur un plan horizontal fixe se trouve placé un point pesant de masse m attiré par un point fixe O, situé au-dessous du plan, en raison inverse de la distance ; trouver les positions d'équilibre du point.

Réponse. — Soient f le coefficient de frottement du point sur le plan, a la distance OP du point attirant O au plan (*fig.* 33), et k l'attraction du point O sur le point mobile M à l'unité de distance. Plaçons le point mobile en M, sur le plan, à une distance OM $= r$ de O ; les forces directement appliquées au point, autres que celles qui proviennent de l'action du plan sur le point, sont au nombre de deux : une force

$$F_1 = \frac{k}{r}$$

dirigée de M vers O, et une force

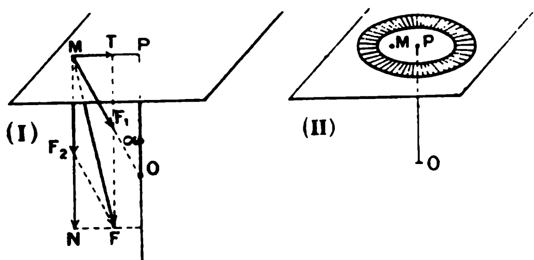
$$F_2 = mg$$

dirigée verticalement vers le bas.

Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que la résultante F de ces deux forces fasse, avec la normale au plan, un angle moindre que l'angle de frottement φ.

Décomposons cette force F en deux, l'une N normale au plan,

Fig. 33.



l'autre T située dans le plan. La composante N est la valeur absolue de la projection de F sur la verticale PO, c'est-à-dire la valeur absolue de la somme des projections des composantes F_1 et F_2 sur PO ; on a donc, en appelant α l'angle de OM avec OP,

$$N = mg + \frac{k}{r}\cos\alpha.$$

De même T est la valeur absolue de la somme des projections de F_1 et F_2 sur MP

$$T = \frac{k}{r}\sin\alpha.$$

La condition d'équilibre est

$$T \leqslant fN.$$

Remplaçons r par sa valeur $\dfrac{a}{\cos\alpha}$; les valeurs de α correspondant

aux positions d'équilibre seront les valeurs définies par l'inégalité

$$(1) \qquad k \cos\alpha \sin\alpha \leqslant fmga + fk \cos^2\alpha.$$

Si l'on prend comme variable

$$\operatorname{tang}\alpha = t$$

l'inégalité devient, en chassant le dénominateur $1 + t^2$ qui est positif et ordonnant,

$$(2) \qquad fmgat^2 - kt + f(mga + k) \geqslant 0.$$

A chaque valeur de t vérifiant cette inégalité, il correspond une valeur de α et, par conséquent, une infinité de positions d'équilibre situées sur une circonférence décrite de P comme centre avec $PM = a \operatorname{tang}\alpha = at$ comme rayon.

Discussion. — Le premier membre de l'inégalité (2) est un trinome du second degré en t dont le premier coefficient $fmga$ est positif. Deux cas sont à distinguer.

Premier cas : le trinome n'a pas de racines. Ce cas se présente quand k est suffisamment petit. *Toutes les positions sur le plan sont des positions d'équilibre.*

Deuxième cas : le trinome a deux racines t' et t'', $t' < t''$ qui sont nécessairement positives. Il faut alors $t < t'$ ou $t > t''$, d'où $PM < at'$ ou $PM > at''$. Si donc on décrit, de P comme centre dans le plan, deux circonférences de rayons at' et at'' il y a équilibre quand le point est dans la plus petite ou hors la plus grande des deux circonférences. Il n'y a pas équilibre dans la couronne intermédiaire couverte de hachures (*fig.* 33, II).

3. Un point pesant mobile, avec frottement, sur un plan horizontal est attiré en raison inverse de la distance par un point fixe O placé au-dessus du plan. Trouver les positions d'équilibre.

4. Même question en supposant l'attraction proportionnelle à la distance.

5. Positions d'équilibre d'un point M mobile sans frottement sur une circonférence de rayon a, ce point étant sollicité par une

force F dont la direction passe par un point fixe A de la circonférence et dont l'intensité est proportionnelle à $(AM - a)^2$.

Réponse. — Trois positions d'équilibre : deux pour lesquelles $AM = a$, et une pour laquelle $AM = 2a$.

6. Positions d'équilibre d'un point pesant mobile sans frottement sur une hélice tracée sur un cylindre de révolution d'axe vertical et attiré par un point fixe de l'axe proportionnellement à la distance.

Réponse. — Une position d'équilibre.

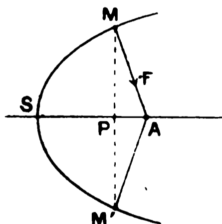
7. On considère une circonférence dont le plan fait un angle quelconque avec le plan horizontal. Trouver les positions d'équilibre d'un point pesant mobile sans frottement sur cette circonférence.

Réponse. — Deux positions qui sont le point le plus haut et le point le plus bas de la circonférence.

8. Un point matériel pouvant glisser sans frottement sur une parabole fixe est sollicité par une force F non nulle, constamment dirigée vers un point fixe A situé sur l'axe de la parabole (*fig.* 34); trouver les positions d'équilibre.

Réponse. — Pour que le point soit en équilibre en M, il faut et il suffit que la force F, c'est-à-dire la droite MA, soit normale à la parabole. Tout d'abord le sommet S de la parabole répond évidemment à la question : c'est une position d'équilibre. Pour voir s'il y en a d'autres, rappelons-nous que, dans la parabole, la sous-normale AP égale le paramètre p. En prenant $AP = p$ dans le sens qui va du foyer au sommet et élevant en P une perpendiculaire à l'axe, on aura, si cette perpendiculaire coupe la courbe, deux autres positions d'équilibre M et M'.

Fig. 34.



§ IV. — DYNAMIQUE DU POINT

Mouvement d'un point matériel sous l'action des forces qui lui sont appliquées.

34. **Théorème fondamental de la Dynamique.** — Imaginons un point matériel de masse m, en mouvement : soient $F_1, F_2, \ldots, F_n$ les forces appliquées au point, à un instant quelconque t, γ l'accélération du point à cet instant. La résultante F des forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ dépend de l'accélération γ par le théorème suivant : *La résultante* F *et l'accélération* γ *ont même direction et même sens, et leurs grandeurs sont liées par la relation*

$$F = m\gamma.$$

Tous les théorèmes de la Dynamique découlent de ce théorème fondamental établi au nº 25.

Nous allons en déduire les divers mouvements dont l'étude est demandée au programme.

35. **Mouvement d'un point matériel soumis à l'action d'une force constante. Point pesant dans le vide.** — Pour avoir un exemple d'un point matériel soumis à une force constante en grandeur, direction et sens, il suffit d'imaginer un point pesant lancé dans le vide, de telle façon que son mouvement ait lieu dans un espace assez petit pour que l'intensité

de la pesanteur et la direction de la verticale restent constantes dans toute l'étendue du mouvement.

Supposons le mobile placé, à l'instant initial $t = 0$, dans une certaine position O, et lançons-le avec une vitesse donnée v_0 dans une certaine direction. Le mobile décrit alors une certaine trajectoire et, à chaque instant t, il est sollicité par une force F verticale descendante égale à son poids mg. L'accélération γ que possède le mobile à un instant quelconque est donc verticale, descendante et égale à $\frac{F}{m}$, c'est-à-dire à g.

Premier cas : Mouvement rectiligne. — Si la vitesse v_0 est dirigée suivant la verticale du point O, le mobile monte ou descend sur cette verticale avec une accélération constante égale à g. Il prend donc un mouvement *uniformément varié*, uniformément retardé dans le cas de l'ascension, uniformément accéléré dans le cas de la descente.

Soit Oy la droite verticale décrite par le mobile. Si l'on prend comme sens positif, sur cette droite, le sens descendant, on a, à chaque instant t, pour l'ordonnée y du mobile M,

$$y = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2,$$

v_0 désignant la valeur algébrique de la vitesse initiale. En particulier, si $v_0 = 0$, on a

$$y = \overline{OM} = \frac{1}{2} g t^2.$$

Second cas : Mouvement curviligne. — Supposons le mobile lancé du point O avec la vitesse v_0, dans une direction oblique par rapport à la direction du poids. Il est évident, par raison de symétrie, que le mobile décrira une courbe située dans le plan vertical passant par la vitesse initiale : il reste alors à trouver les équations du mouvement dans ce plan.

Prenons, pour origine O, la position initiale du mobile, pour axe Oy la verticale dirigée vers le haut (en sens contraire du poids) et pour axe Ox l'horizontale du plan de la trajectoire, prise positivement de façon à faire un angle aigu avec la direction de la vitesse initiale.

Appelons α l'angle de la vitesse initiale OV_0 avec Ox, cet angle étant considéré comme positif quand la vitesse est au-dessus de Ox (cas de la figure 35) et comme négatif quand elle est au-dessous. Les projections de la vitesse initiale sur les axes sont

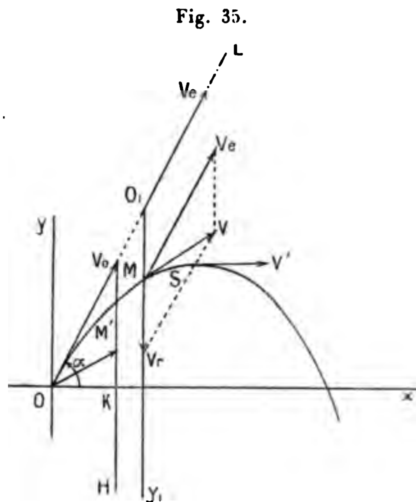
$$v_0 \cos \alpha, \qquad v_0 \sin \alpha.$$

1° *Hodographe.* — L'hodographe du mouvement cherché est une droite verticale V_0H, passant par l'extrémité V_0 de la vitesse initiale (*fig.* 35) et parcourue avec une vitesse descendante égale à la constante g.

En effet, soit M la position du mobile à l'instant t, MV sa vitesse ; menons par O un vecteur OM' égal et parallèle à MV ; le point M' décrit l'hodographe avec une vitesse qui est, à chaque instant, égale à l'accélération de M. Mais actuellement, l'accélération de M

est dirigée verticalement vers le bas et égale à g ; la vitesse de M' est donc constamment dirigée suivant la verticale, vers le bas, et égale à g ; et le point M' qui part de V_0 à l'instant $t = 0$ décrit la verticale descendante V_0H avec la vitesse g. Le chemin parcouru par le point M' depuis l'instant $t = 0$ est

Fig. 35.



$$V_0M' = gt.$$

Le vecteur vitesse MV ou OM' du point M est donc, à chaque instant t, la somme géométrique de la vitesse initiale OV_0 et du vecteur descendant $V_0M' = gt$.

Direction de la vitesse. — On voit que l'angle que fait la vitesse avec Ox va sans cesse en diminuant, car lorsque t croît, le point M' descend sur V_0H.

Si α est négatif, l'angle xOM' décroissant à partir de α est constamment négatif; le mobile M descend constamment et sa vitesse augmente.

Si α est positif, l'angle xOM' est d'abord positif (*fig.* 35); le mobile monte d'abord et sa vitesse diminue. A l'instant t' où M' vient en K, sur Ox, la vitesse est horizontale et minimum; le mobile est en S : à cet instant $V_0K = gt'$ et le triangle OV_0K donne

$$(1) \qquad gt' = v_0 \sin \alpha.$$

A partir de cet instant t', la vitesse fait un angle négatif avec Ox; le mobile redescend sur la trajectoire, avec une vitesse croissante.

Grandeur de la vitesse. — Dans le triangle $OM'V_0$ l'angle en V_0 est le complément de α; on a donc, en calculant le côté OM' ou v :

$$(2) \qquad v^2 = v_0^2 + g^2t^2 - 2gtv_0 \sin \alpha,$$

formule qui donne la grandeur de la vitesse à chaque instant.

2° *Trajectoire.* — Par la position M du mobile à l'instant t menons une verticale descendante O_1My_1 et appelons O_1 le point où cette verticale rencontre le prolongement OL de OV_0. Quand t varie la droite O_1y_1 se déplace d'un mouvement de translation dont la vitesse V_e est celle du point O_1; en même temps le point M se déplace sur cette droite O_1y_1. Le mouvement de M peut être regardé comme résultant du mouvement de translation de O_1y_1 et du mouvement relatif de M sur O_1y_1. La vitesse MV de M est alors la résultante de la

vitesse d'entraînement MV_e parallèle à OL et de la vitesse relative MV_r dirigée suivant O_1y_1. Mais le triangle ainsi construit MV_eV est égal au triangle OV_0M' car $MV = OM'$ et tous les angles sont égaux puisque les côtés sont parallèles. Donc la vitesse d'entraînement V_e est égale à v_0 et la vitesse relative V_r est égale à V_0M' ou gt. En appelant y_1 la longueur O_1M et y'_1 la dérivée de y_1 par rapport à t, on a donc

$$y'_1 = gt$$

d'où

$$y_1 = \frac{1}{2} gt^2$$

sans ajouter de constante, car pour $t = 0$, y_1 est nul, les deux points M et O_1 se confondant alors en O. En résumé, le mouvement du point M s'obtient en imaginant une droite verticale O_1y_1 qui se meut de façon que le point O_1 parcourt la droite OV_0L avec la vitesse constante v_0, tandis que M décrit O_1y_1, d'un mouvement uniformément accéléré d'accélération g, sans vitesse relative initiale.

Coordonnées du point M *à l'instant* t. — Comme on a

$$OO_1 = v_0t$$

les coordonnées du point O_1 sont

$$v_0t \cos \alpha, \qquad v_0t \sin \alpha.$$

L'abscisse x du point M est évidemment égale à celle de O_1 ; l'ordonnée y du point M est égale à celle de O_1 diminuée de OO_1 c'est-à-dire de $y_1 = \frac{1}{2} gt^2$.

On a ainsi

$$(M) \qquad \begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha \\ y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} gt^2. \end{cases}$$

Vitesse en fonction de la position. — A l'aide de ces relations on peut calculer la vitesse en fonction de la hauteur y du mobile : en effet, la valeur (2) trouvée pour v^2 peut s'écrire

$$(3) \qquad v^2 = v_0^2 - 2gy :$$

la *valeur numérique* de la vitesse à chaque instant est la même que si le mobile tombait sans vitesse initiale de la hauteur $\frac{v_0^2}{2g}$ à la hauteur y.

Trajectoire. — Entre les équations (M) éliminons le temps ; nous obtenons l'équation de la trajectoire

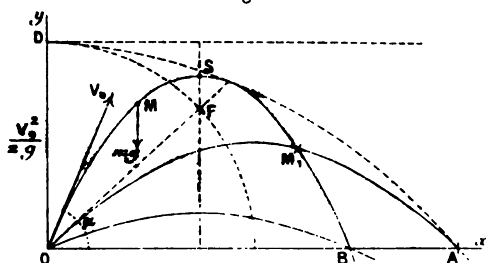
$$(4) \qquad y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tang} \alpha.$$

C'est une parabole d'axe vertical (*fig.* 36) qui tourne sa concavité vers le bas, car le coefficient de x^2 est négatif.

Si nous supposons $\alpha > 0$ (cas de la figure 36), le

mobile monte d'abord; il monte jusqu'au sommet S

Fig. 36



de la parabole où sa vitesse devient horizontale ; ce qui se produit au bout d'un temps t' donné par l'équation (1)

$$t' = \frac{v_0 \sin \alpha}{g};$$

y étant alors maximum, la vitesse est minimum en vertu de la relation (3). Les coordonnées du sommet S s'obtiennent en portant cette valeur de t' dans les formules (M).

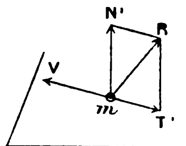
Après cet instant t', le mobile redescend. Lorsqu'il repasse à la même hauteur, la valeur numérique de la vitesse redevient la même d'après la formule (3). En particulier, il repasse au point B au niveau de O avec la vitesse v_0.

La portée horizontale OB est double de l'abscisse du sommet :

$$OB = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

36. Lois du frottement de glissement à l'état de mouvement. — Nous avons vu suivant quelles lois s'exerce la réaction d'un plan sur un point pouvant glisser sur le plan, lorsque ce point est en équilibre.

Fig. 37.



Quand le point glisse sur le plan, les lois de la réaction sont changées. Soient m le point mobile, V sa vitesse (*fig.* 37) à l'instant t; cette vitesse est un vecteur du plan. La réaction R du plan sur le point est une force *oblique au plan*; décomposons cette force en une force normale N' et une force parallèle au plan T'; la force normale est située par rapport au plan du côté où est placé le point; elle a une grandeur quelconque : *la force tangentielle* T' *est dirigée en sens contraire de la vitesse* V *du point et sa grandeur est donnée par la relation*

$$T' = fN',$$

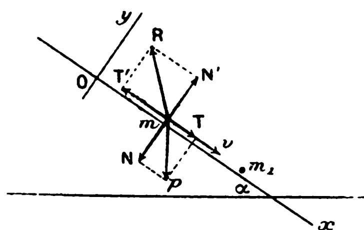
f étant le coefficient de frottement du point sur le plan. On voit que, quand il y a équilibre, T' est inférieur à fN'; au contraire, quand il y a mouvement, T' est constamment égal à fN'.

Application : Mouvement rectiligne d'un point pesant sur un plan incliné. — Soit un point matériel de poids p posé sur un plan incliné : nous supposons qu'à l'instant $t = 0$ le point soit abandonné à lui-même ou lancé avec la vitesse v_0 dans la direction d'une ligne de

plus grande pente, soit vers le bas, soit vers le haut. Le mouvement est alors rectiligne et le point décrit une portion de ligne de plus grande pente.

Dans ce qui suit nous prendrons pour origine O la position initiale du mobile (*fig.* 38), comme axe des x la ligne de plus grande pente partant de O, comme axe des y la perpendiculaire à Ox vers le haut. Nous appellerons α l'angle de Ox avec l'horizon.

Fig. 38.



Dans une position quelconque du mobile m, son poids $p = mg$ peut être décomposé en une force $T = mg \sin \alpha$, dirigée suivant Ox, et une force N, normale au plan vers le bas, égale à $mg \cos \alpha$.

Divers cas sont à distinguer, suivant les conditions initiales et la grandeur de l'angle α comparé à l'angle de frottement φ du point sur le plan.

Premier cas : le point est abandonné sans vitesse en O. — Si

$$T \leqq fN, \quad \text{tang}\, \alpha \leqq f, \quad \alpha \leqq \varphi,$$

le point reste immobile, comme nous l'avons vu.

Si

$$T > fN, \quad \text{tang}\, \alpha > f, \quad \alpha > \varphi,$$

le point se met à glisser vers le bas ; sa vitesse v à un ins-

tant quelconque est dirigée vers le bas (*fig.* 38); le plan exerce sur le point une réaction R qu'on peut décomposer en une force normale N′ et une force tangentielle T′ ; d'après les lois du frottement à l'état de mouvement, T′ est en sens contraire de la vitesse et égale à fN′ en valeur absolue.

Prenons comme sens positif de Ox le sens descendant (*fig.* 38). Le mobile, décrivant la droite Ox, son accélération γ est dirigée suivant cette droite; la résultante $m\gamma$ des quatre forces T, N, T′, N′ qui lui sont appliquées est aussi dirigée suivant Ox. Les deux forces normales à Ox doivent donc se détruire et l'on a $N' = N$ ou

$$N' = mg \cos \alpha.$$

Le point est alors soumis aux deux forces constantes $T = mg \sin \alpha$ et $T' = f N' = fmg \cos \alpha$ dirigées comme l'indique la figure 38. La valeur algébrique γ de l'accélération, estimée positivement dans le sens Ox, est donc donnée par l'équation

$$m\gamma = T - T' = mg (\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Comme tang α est supposé supérieur à f, le deuxième membre est une constante positive et le mouvement est un mouvement descendant uniformément accéléré, dont l'accélération est

$$\gamma = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) = g \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi},$$

en remplaçant f par tang φ. On a donc pour l'équation du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \gamma = g (\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

On en déduit pour la vitesse v du mobile

$$v = \gamma t = gt(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

sans ajouter de constante, puisque pour $t = 0$ la vitesse est supposée nulle ; puis

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{1}{2} g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t^2,$$

sans ajouter de constante, car le mobile part de O.

Deuxième cas : le point est lancé vers le bas, avec une vitesse v_0. — Comme la vitesse varie d'une manière continue, elle est, au début, dans le sens Ox : donc la force de frottement T′ est en sens contraire et l'équation du mouvement est encore

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \gamma = g(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

1° Si $\tang\alpha < f$, $\alpha < \varphi$, le mouvement est uniformément *retardé*, car le coefficient de g est négatif ; on a alors,

$$v = \frac{dx}{dt} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + v_0 ;$$

la vitesse s'annule au bout du temps

$$t_1 = \frac{v_0}{g(f\cos\alpha - \sin\alpha)}.$$

A cet instant le mobile occupe une certaine position m_1 (*fig.* 38) facile à obtenir par la formule

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t^2$$

qui donne le chemin parcouru ; il se trouve alors dans les

mêmes conditions que s'il était abandonné en m_1 sur le plan, sans vitesse initiale, et il reste immobile en m_1, car $\alpha < \varphi$.

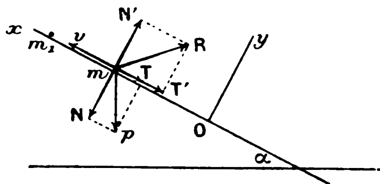
En résumé, le mouvement est uniformément retardé et, au moment ou la vitesse s'annule, le point s'arrête et reste immobile. C'est là le fait qui se produit, par exemple, pour $\alpha = 0$; si on lance une pierre sur un plan horizontal, elle décrit une droite avec une vitesse décroissante et finit par s'arrêter.

2° Si $\tang \alpha > f$, le point se meut sur Ox d'un mouvement uniformément accéléré.

3° Si $\tang \alpha = f$, $\alpha = \varphi$, on a $\gamma = 0$, le mouvement est rectiligne et uniforme.

Troisième cas : le point est lancé vers le haut. — Prenons le sens de la vitesse initiale v_0 comme sens des x positifs. Dans une position m, la vitesse du mobile est dans le sens

Fig. 39.



positif (*fig.* 39), donc T' est dans le sens négatif comme $mg \sin \alpha$; les deux forces $T' = fmg \cos \alpha$ et $mg \sin \alpha$ s'ajoutent alors pour donner une force $mg(\sin \alpha + f \cos \alpha)$ dans le sens négatif. L'équation du mouvement est

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \gamma = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) ;$$

elle définit un mouvement d'abord uniformément retardé; on en déduit

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 - g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\,t.$$

Le point arrive au bout du temps

$$t_1 = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$$

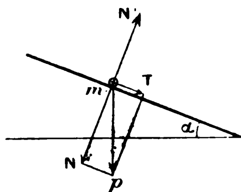
dans la position m_1 où sa vitesse s'annule. A partir de ce moment, il est dans les conditions du premier cas; il se comporte comme s'il était abandonné sans vitesse initiale sur le plan.

Si $\alpha \leqslant \varphi$, il reste immobile en m_1;

Si $\alpha > \varphi$, il revient sur ses pas d'un mouvement uniformément accéléré d'accélération $g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$.

37. **Mouvement d'un point sur une ligne de plus grande pente d'un plan incliné, sans frottement.** — Quand le point se meut sans frottement, $f = 0$; la composante tangentielle T′ de la réaction du plan sur le point est nulle, et cette réaction se réduit à la composante normale N′ (*fig.* 40). Dans ce cas, les forces normales au plan N et N′ se détruisent comme précédemment, et la force T dirigée suivant la ligne de plus grande pente est égale à $mg\sin\alpha$. Le point se meut donc d'un mouvement rectiligne dont l'accélération, dirigée vers le bas, a la valeur constante $g\sin\alpha$.

Fig. 40.

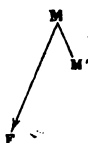


§ V. — TRAVAIL

38. **Travail.** — La notion de travail est une des plus importantes de la mécanique. C'est, en effet, par leur travail que les forces sont utilisées dans l'Industrie, et le rôle des machines consiste principalement dans la transformation d'un travail en un autre.

39. **Travail d'une force constante, en grandeur, direction et sens, appliquée à un point matériel dont le déplacement est rectiligne.** — Imaginons un point matériel M sollicité par un nombre quelconque de forces. Supposons que l'une de ces forces F reste constante en grandeur, direction et sens quand le point se déplace ; supposons enfin que le point M se déplace en suivant une ligne droite MM′ (*fig.* 41).

Fig. 41.



On appelle *travail de la force* F, pour *le déplacement* MM′, *le produit*

$$\text{(1)} \qquad F.MM' \cos F.MM',$$

c'est-à-dire *le produit de la force par le déplacement et le cosinus de l'angle de la force avec le déplacement.*

Dans ce produit, les deux premiers facteurs sont positifs ; le troisième peut être positif, négatif ou nul. Le travail que nous venons de définir est donc une

quantité algébrique, supérieure, inférieure ou égale à zéro, suivant que l'angle F.MM′ est inférieur, supérieur ou égal à un angle droit. Quand le travail de la force F est *positif*, on dit qu'il est *moteur* ; quand il est *négatif*, on dit qu'il est *résistant*.

40. **Unités de travail.** — Dans l'expression (1) du travail, le facteur F est un nombre exprimant des unités de force, le facteur MM′ est un nombre exprimant des unités de longueur ; le facteur cos F.MM′ est un nombre abstrait. Le travail est alors exprimé par un nombre qui dépend des unités choisies pour mesurer les forces et les longueurs.

L'unité de travail est le travail obtenu en faisant agir une force constante, égale à l'unité de force, sur un point qui subit un déplacement égal à l'unité de longueur dans le sens même de la force. Alors

$$F = 1, \qquad MM' = 1, \qquad \cos F.MM' = 1,$$

car l'angle F.MM′ = 0. La formule donne, en effet, dans ce cas, un travail exprimé par 1.

Premier système d'unités. — Quand on prend comme unité de force le poids absolu d'un kilogramme à Paris et comme unité de longueur le mètre, l'unité de travail s'appelle *kilogrammètre ;* c'est le travail d'une force de 1^{kg} appliquée à un point matériel qui se déplace de 1^{m} dans le sens de la force.

Deuxième système : Unités C. G. S. — Quand on

prend comme unité de force la *dyne* et comme unité de longueur le *centimètre,* l'unité de travail s'appelle *erg:* c'est le travail d'une force de 1 dyne appliquée à un point matériel qui se déplace de 1^{cm} dans le sens de la force.

Exemple. — Un homme tire un corps solide sur un plan horizontal à l'aide d'une corde AB attachée en un point matériel A faisant partie du corps : la corde AB est supposée tendue par l'homme de telle façon que la tension T de la corde au point A soit constante et égale à 20 kg forces. De plus, la corde AB fait un angle de 60° avec le plan horizontal, et l'on suppose que l'homme marche de telle façon que le point A se déplace suivant une horizontale AA′, dans le plan vertical passant par AB. Quel est le travail de la tension T pour un déplacement AA′ égal à 100^{m}?

D'après la formule générale, ce travail est

$$T.AA' \cos 60^\circ$$

ou

$$20.100 . \frac{1}{2} = 1000.$$

Le travail est donc de 1000 *kilogrammètres*, puisque les forces ont été exprimées en kilogrammes, et les longueurs en mètres.

41. **Théorèmes relatifs au travail.** — Soit, comme plus haut, une force constante F agissant sur un point M qui subit un déplacement rectiligne MM′.

Théorème I. — Écrivons le travail

$$MM'\,(F \cos F.MM'),$$

nous voyons qu'il *est égal au produit du déplacement par la projection de la force sur le déplacement*. On en conclut que, *si plusieurs forces constantes en grandeur, direction et sens sont appliquées à un point* M *qui subit un déplacement rectiligne* MM', *le travail de la résultante de ces forces est égal à la somme algébrique des travaux des composantes*.

En effet, le travail de la résultante est égal au produit de MM' par la projection de la résultante sur MM', c'est-à-dire par la somme des projections des composantes sur MM' : il est donc égal à la somme des travaux des composantes.

Théorème II. — En écrivant le travail d'une force constante sous la forme

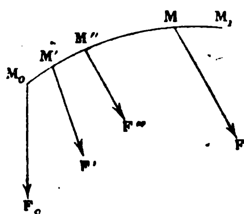
$$F\,(MM' \cos F.MM'),$$

on peut le définir *le produit de la force par la projection du déplacement sur la force*.

On en conclut que : *si le déplacement* MM' *est la somme géométrique de plusieurs déplacements rectilignes, le travail d'une force constante* F *correspondant au déplacement résultant* MM' *est la somme algébrique des travaux de cette même force correspondant aux déplacements composants*.

42. Travail total d'une force variable appliquée à un point matériel qui subit un déplacement curviligne. — Considérons (*fig.* 42) un mobile M qui subit un déplacement curviligne quelconque en partant d'un point M_0 à l'instant t_0, et arrivant au point M_1 à l'instant t_1, après avoir décrit une courbe M_0M_1, suivant une certaine loi de mouvement. Soit F une des forces agissant sur ce mobile, cette force pouvant varier en grandeur et direction quand le mobile se meut. Pour définir le travail total de cette force dans le déplacement considéré, divisons l'arc M_0M_1 en parties très petites M_0M', $M'M''$, $M''M'''$, ... par des points intermédiaires M', M'', M''', ... Quand le mobile est en M_0, la force considérée F a une détermination particulière F_0; quand il est en M', elle a une détermination F'; en M'', une détermination F'', ... Les points M_0, M' étant très rapprochés, on peut confondre l'arc M_0M' avec la corde M_0M'; en outre, dans le déplacement M_0M', la force restera sensiblement constante et égale à la détermination F_0 qu'elle a au point M_0. Le travail de la force, pour le déplacement M_0M', pourra donc être regardé comme très approximativement égal à

Fig. 42.



$$F_0.M_0M' \cos(F_0.M_0M').$$

De même le travail de la force F, de M′ en M″, sera approximativement

$$F' . M'M'' \cos (F' . M'M'') ;$$

de M″ en M‴,

$$F'' . M''M''' \cos (F'' . M''M'''),$$

. . . . ,

et ainsi de suite. Le travail total de la force considérée est alors *la somme de ces travaux élémentaires ou, plus rigoureusement, la limite vers laquelle tend cette somme quand le nombre des points intermédiaires* M′, M″, M‴, ... *augmente indéfiniment et que toutes les longueurs* M_0M', *M′M″, M″M‴, ... tendent vers zéro.* On a ainsi, en appelant $\mathfrak{T}$ le travail total de la force considérée pour le déplacement M_0M_1,

$$\mathfrak{T} = \lim(F_0.M_0M' \cos F_0 . M_0M' + F'.M'M'' \cos F' . M'M'' + \ldots).$$

Ce travail total $\mathfrak{T}$ sera exprimé en *kilogrammètres* ou en *ergs,* suivant les unités choisies.

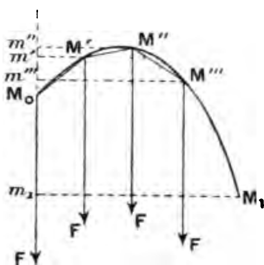
43. Travail total de la résultante de plusieurs forces. — Supposons que plusieurs forces F_1, F_2, F_n agissent simultanément sur un point matériel qui subit un déplacement fini de M_0 en M_1, en suivant une certaine courbe. Soit F la résultante de ces forces.

Pour chacun des déplacements élémentaires M_0M', M′M″, M″M‴, ..., le travail de la résultante est égal à la somme des travaux des composantes. Donc, pour le déplacement total, *le travail total de la résultante*

est aussi égal à la somme des travaux totaux des composantes.

44. **Exemples : 1° Travail total d'une force F, constante en grandeur, direction et sens, appliquée à un point qui subit un déplacement curviligne quelconque.** — Nous allons démontrer que, dans ce cas, *le travail est le produit de la force par la projection du déplacement curviligne* M_0M_1 *sur la force.*

Fig. 43.



En effet, dans ce cas particulier, les déterminations F_0, F', F'', F''', ... de la force au point M_0 et aux points intermédiaires M', M'', M''', ... sont toutes égales à F, en grandeur, direction et sens (*fig.* 43). Les divers travaux élémentaires correspondant aux déplacements successifs M_0M', $M'M''$, ... sont alors

$$F \text{ proj. } M_0M',$$
$$F \text{ proj. } M'M'',$$
$$F \text{ proj. } M''M''',$$
$$\ldots\ldots,$$

où proj. M_0M', proj. $M'M''$, ... sont les projections des déplacements successifs sur la direction constante de la force F. Le travail total est donc

$$F(\text{proj. } M_0M' + \text{proj. } M'M'' + \text{proj. } M''M''' + \ldots).$$

Or, d'après le théorème des projections, la somme des projections, sur la direction de F, des côtés M_0M', $M'M''$, $M''M'''$, ... de la ligne polygonale partant de M_0 et aboutissant en M_1, est égale à la projection M_0m_1 de M_0M_1 sur la direction de F. Le travail total de F est donc

$$F \text{ proj. } M_0M_1 ;$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Par exemple, lorsqu'un point pesant se déplace, il est soumis à son poids qui est une force $F = mg$, constante en grandeur, direction et sens. Quand le point passe d'une position M_0 à une autre M_1, *en suivant un chemin quelconque,* le travail du poids est égal au produit de mg par la valeur algébrique de la projection du déplacement M_0M_1 sur la direction du poids, c'est-à-dire *sur la verticale descendante* ; on peut dire aussi que c'est le produit de mg par la hauteur, dont *descend* le point en passant de sa position initiale à sa position finale. Ainsi, un point du poids de 3 kilogrammes étant transporté du troisième étage dans la rue, d'une hauteur de 9 mètres, nous trouverons, pour le travail du poids,

$$3.9 = 27 \text{ kilogrammètres.}$$

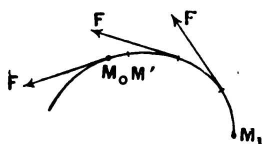
Si le même point est monté du troisième au cinquième, il *descend d'une quantité négative,* soit, par exemple, de — 6 mètres ; le travail total de son poids est alors

$$3 \times (-6) = -18 \text{ kilogrammètres.}$$

Enfin, si le même point, partant du troisième étage, est transporté d'une façon quelconque et revient finalement au troisième étage, à la même altitude, le travail de son poids est *nul*.

2° **Force constante en grandeur, tangente à la trajectoire du point matériel, en sens contraire du déplacement.** — Supposons un point M qui parcourt une trajectoire M_0M_1, et imaginons que ce point soit sollicité par une force F d'intensité constante k dirigée, à chaque instant, suivant la tangente à la trajectoire en sens contraire du mouvement (*fig.* 44). Si le mobile subit, sur la trajectoire, un déplacement infiniment petit M_0M', la force est, par hypothèse, dirigée en sens contraire de ce déplacement, l'angle de F avec M_0M' est de 180°,

Fig. 44.



$$\cos F \,.\, M_0M' = -1,$$

et le travail élémentaire de la force, pour le déplacement M_0M', est

$$-k \,.\, M_0M'.$$

Il en sera de même pour chaque déplacement élémentaire M_0M', $M'M''$, $M''M'''$, ... La somme des travaux élémentaires ou travail total $\mathfrak{T}$ est donc

$$-k(M_0M' + M'M'' + M''M''' + \ldots),$$

ou enfin

$$\mathcal{T} = -kl,$$

l étant la longueur totale du chemin parcouru, car la somme des déplacements élémentaires est évidemment la longueur du chemin parcouru.

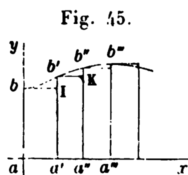
3° **Force variable constamment normale à la trajectoire.** — Si un point est sollicité par une force F qui est, à chaque instant, normale à la trajectoire du point, tous les angles formés par les déplacements infiniment petits M_0M', $M'M''$, ... avec la direction correspondante de la force sont droits ; les travaux élémentaires sont tous *nuls* et le *travail total est nul.*

45. **Evaluation graphique du travail total.** — On peut évaluer graphiquement la somme

$$\mathcal{T} = \lim(F_0.M_0M' \cos F_0.M_0M' + F'.M'M'' \cos F'.M'M'' + \ldots)$$

qui, d'après les explications données au n° 42, constitue le travail total de la force F.

Fig. 45.



Pour cela prenons deux axes rectangulaires ax et ay (*fig.* 45) : portons en abscisses à la suite les unes des autres des longueurs aa', $a'a''$, $a''a'''$, ... respectivement égales aux déplacements rectilignes élémentaires M_0M', $M'M''$, $M''M'''$, ... de la figure 42 ; portons, sur les ordonnées correspondantes, des seg-

ments positifs ou négatifs ab, $a'b'$, $a''b''$, ... égaux respectivement aux quantités.

$$F_0 \cos F_0 . M_0M', \quad F' \cos F' . M'M'', \quad F'' \cos F'' . M''M''', \quad \ldots,$$

puis joignons les points obtenus par un trait continu.

Le premier terme de la somme $\mathfrak{T}$ qui peut s'écrire

$$M_0M' . F_0 \cos F_0 . M_0M',$$

est égal à

$$aa' . ab;$$

il est donc mesuré par l'aire du rectangle $ab\text{I}a'$ construit sur aa' et ab. Le deuxième terme de $\mathfrak{T}$ est égal à

$$a'a'' . a'b';$$

il est mesuré de même par l'aire du rectangle

$$a'b'\text{K}a'',$$

et ainsi de suite. Le travail total est égal approximativement à la somme de ces rectangles.

Rigoureusement parlant, le travail total est la limite vers laquelle tend la somme de ces rectangles quand le nombre des positions intermédiaires M', M'', M''', ... augmente indéfiniment et que tous les déplacements M_0M', $M'M''$, $M''M'''$, ..., c'est-à-dire les segments aa', $a'a''$, $a''a'''$, ... tendent vers zéro.

Le travail total sera donc représenté par l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe limite $bb'\,b''b'''$ ..., l'axe ax, l'ordonnée initiale ab et une certaine ordonnée finale a_1b_1 dont l'abscisse aa_1 serait

la limite de la somme des déplacements élémentaires

$$M_0M' + M'M'' + M''M''' + \ldots,$$

c'est-à-dire la longueur totale du chemin M_0M_1 suivi par le point matériel.

§ VI. — THÉORÈME DE LA FORCE VIVE

46. **Force vive; énergie cinétique.** — On appelle *force vive* d'un point de masse m animé d'une vitesse v *le produit*

$$mv^2$$

de la masse par le carré de la vitesse. La force vive est donc un *nombre* qui dépend du choix des unités fondamentales. Nous verrons plus loin quelles unités représente ce nombre.

On appelle aussi *énergie cinétique* du point *la demi-force vive* $\frac{mv^2}{2}$.

47. **Théorème de la force vive pour un point matériel.** — Il existe, entre la variation de la force vive d'un point et le travail total de la résultante de toutes les forces appliquées à ce point, une relation d'une importance capitale qui constitue le *théorème de la force vive.*

Nous indiquerons d'abord ce théorème pour un

point libre soumis à une force constante en grandeur, direction et sens : nous l'étendrons ensuite au cas général.

I. **Théorème de la force vive pour un point soumis à la seule pesanteur.** — Prenons d'abord le cas d'un point matériel libre soumis uniquement à l'action de la pesanteur. Ce point est sollicité par une force F constante en grandeur, direction et sens, égale au poids du point

$$F = mg.$$

Nous avons étudié au n° 35 le mouvement de ce point, en prenant comme origine O la position initiale du point et comme axe Oy la verticale ascendante (*fig.* 36). A l'instant $t = 0$, le mobile est en O avec une vitesse v_0 ; à l'instant t, il est en M avec une vitesse v ; en appelant y l'ordonnée du point M, nous avons trouvé

$$v^2 = v_0^2 - 2gy.$$

Introduisons la demi-force vive $\frac{mv^2}{2}$ en écrivant

$$(1) \qquad \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgy.$$

Sous cette forme, nous voyons que le premier membre est la variation que subit la demi-force vive quand le mobile passe du point O au point M : quant au deuxième membre, il est égal au travail total du poids pour le même déplacement, car il est égal au

produit du poids, $F = mg$, par la projection $-y$ du déplacement OM sur la verticale descendante, c'est-à-dire sur la direction de F.

L'équation (1) exprime donc le fait suivant :

Quand le mobile passe de la position O *à la position* M, *la variation de la demi-force vive est égale au travail total du poids.*

La même relation a lieu quand on compare entre elles les vitesses v et v_1 du mobile aux deux instants t et t_1 où il occupe les positions M et M_1 d'ordonnées y et y_1. En effet, l'équation (1) appliquée successivement aux positions M_1 et M donne

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgy_1,$$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgy;$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$(2) \qquad \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = -mg(y_1 - y).$$

Comme le second membre est encore égal au produit de la force $F = mg$ par la projection $-(y_1 - y)$ du déplacement MM_1 sur la direction de la force, on voit que l'on a

$$(3) \qquad \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = F.MM_1 \cos F.MM_1.$$

La variation de la demi-force vive, de la position M

à la position M_1, *est égale au travail total de la force correspondant au déplacement* MM_1.

II. **Point matériel libre soumis à une force F constante en grandeur et direction.** — Si un point matériel est lancé avec une vitesse initiale quelconque et soumis à une force F constante en grandeur et direction, il se meut de la même façon qu'un point pesant, avec cette seule différence que l'accélération constante en grandeur et direction que prend le point est égale à $\frac{F}{m}$, au lieu de g.

Dès lors on peut appliquer au mouvement du point tous les résultats du cas précédent ; en appelant v et v_1 les vitesses du mobile dans les positions M et M_1, on a la relation

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = F.MM_1 \cos F.MM_1, \tag{4}$$

qui donne lieu au même énoncé.

III. **Théorème général de la force vive pour un point matériel.** — Soit maintenant un point matériel de masse m soumis à un nombre quelconque de forces quelconques F_1, F_2, ..., F_n dont la résultante est, à chaque instant, une certaine force F pouvant varier d'un instant à l'autre en grandeur et en direction.

Supposons qu'à un instant t_0 le mobile soit en M_0 avec une vitesse v_0, puis qu'à un autre instant t_1 il soit

en M_1 avec une vitesse v_1, après avoir suivi une certaine trajectoire MM_1 (*fig.* 42).

Nous allons démontrer le théorème suivant.

Dans le mouvement d'un point matériel sous l'action de forces quelconques, la variation $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$ *de la demi-force vive, quand le point passe de la position* M_0 *à la position* M_1, *est égale au travail de la résultante* F *de toutes les forces qui lui sont appliquées, correspondant au déplacement curviligne* M_0M_1 *du point.*

En effet, prenons sur la trajectoire M_0M_1 (*fig.* 42) des positions intermédiaires très rapprochées M', M'', M''', ..., $M^{(n-1)}$, $M^{(n)}$, comme au n° 42, puis appelons F_0, F', F'', F''', ..., $F^{(n-1)}$, $F^{(n)}$, les déterminations de la résultante F, et v_0, v', v'', ..., v_{n-1}, v_n les valeurs de la vitesse du mobile dans ces diverses positions.

Dans le déplacement très petit M_0M', la force F peut être regardée comme constante en grandeur, direction et sens et égale à sa détermination F_0 au point M_0 ; on pourra donc appliquer à ce déplacement le résultat du cas précédent, et écrire

$$(1) \qquad \frac{mv'^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = F_0 . M_0M' \cos F_0 . MM'.$$

De même, dans le déplacement très petit $M'M''$, la force F peut être considérée comme constante et égale à la détermination F' de la force au point M'. On aura donc

(2) $$\frac{mv''^2}{2} - \frac{mv'^2}{2} = F'. M'M'' \cos F'. M'M'';$$

puis, d'après le même raisonnement appliqué au déplacement $M''M'''$,

(3) $$\frac{mv'''^2}{2} - \frac{mv''^2}{2} = F''. M''M''' \cos F''. M''M'''.$$

On continuera ainsi, jusqu'aux derniers déplacements élémentaires $M^{(n-1)} M^{(n)}$ et $M^{(n)} M_1$ qui donneront

(n) $$\left\{ \begin{aligned} &\frac{mv_n^2}{2} - \frac{mv_{n-1}^2}{2} \\ &= F^{(n-1)}. M^{(n-1)} M^{(n)} \cos F^{(n-1)}. M^{(n-1)} M^n, \end{aligned} \right.$$

$(n+1)$ $$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_n^2}{2} = F^{(n)}. M^{(n)} M_1 \cos F^{(n)}. M^{(n)} M_1.$$

Ajoutant membre à membre toutes ces relations (1), (2), . . . , $(n+1)$, on voit que les vitesses intermédiaires disparaissent et il reste la relation

$$\begin{aligned} \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = {} & F_0. M_0M' \cos F_0. M_0M' \\ & + F'. M'M'' \cos F'. M'M'' \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + F^{(n)}. M^{(n)}M_1 \cos F^{(n)}. M^{(n)}M_1. \end{aligned}$$

Dans cette équation le deuxième membre est le travail total de la force F dans le déplacement curviligne MM_1 ; ce qui démontre le théorème.

Comme le travail total de la résultante est égal à la somme des travaux totaux des composantes, on peut dire aussi que :

La variation de la demi-force vive d'un point, quand il passe d'une position à une autre, sous l'action de certaines forces, est égale à la somme des travaux totaux de toutes les forces appliquées.

48. **Unités.** — La variation d'une force vive étant mesurée par un travail, une force vive et un travail sont des quantités de même nature. Le nombre qui exprime une force vive exprime donc des unités de travail.

Si l'on prend le système C.G.S., une force vive mv^2 est exprimée en *ergs*; si l'on prend le système mètre, seconde, kilogramme-force, une force vive mv^2 est exprimée en *kilogrammètres*. Par exemple, si un projectile d'une masse de 20^g a une vitesse de 10^{cm} par seconde, sa force vive mv^2 est

$$20 \cdot 10^2 = 2000 \text{ ergs}.$$

Si un boulet de canon d'un poids de 2^{kg} a une vitesse de 500^m à la seconde, sa masse, dans le système mètre, seconde, kilogramme-force, est

$$m = \frac{P}{g}, \quad m = \frac{2}{9,8},$$

et sa force vive

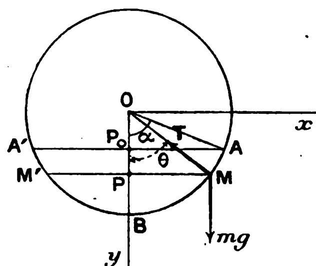
$$\frac{2}{9,8} 500^2 = \text{environ } 50\,000^{kgm},$$

en remplaçant 9,8 par 10.

49. **Exemple. Pendule simple.** — Un point

pesant de masse m est attaché à un point fixe O par un fil sans masse de longueur l. On écarte le fil de la verticale Oy et l'on amène le point dans une position A (*fig.* 46) telle que l'angle yOA ait une valeur connue α que nous supposons moindre que $\frac{\pi}{2}$. On abandonne ensuite le point sans vitesse. Le point tombe en décrivant un arc de cercle. On demande de calculer sa vitesse v dans une position quelconque M, dans laquelle le fil OM fait un angle θ avec Oy.

Fig. 46.



Appliquons le théorème de la force vive au mouvement, depuis la position initiale A où la vitesse v_0 est nulle par hypothèse, jusqu'à la position M où elle est v. Les forces appliquées au point mobile sont : 1° le poids mg, force verticale *constante* ; 2° la tension T avec laquelle le fil tire le point M ; cette tension T est dirigée de M vers O, elle est *normale* à la circonférence décrite par M, c'est-à-dire à la trajectoire. D'après le théorème de la force vive, la variation $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$ de la demi-force vive, de A en M, est égale à la somme des travaux des deux forces mg et T. Le travail du poids est égal au poids mg, multiplié par la projection P_0P du déplacement AM sur la direction du poids, c'est-à-

dire sur Oy. Le travail de la tension T est *nul*, car cette force est constamment normale à la trajectoire (n° 44). On a donc, puisque $v_0 = 0$,

$$(1) \qquad \frac{mv^2}{2} = mg\,\overline{P_0P}, \qquad v^2 = 2g\,\overline{P_0P}.$$

Or

$$P_0P = OP - OP_0 = l(\cos\theta - \cos\alpha).$$

On a donc, enfin,

$$(2) \qquad v^2 = 2\,gl(\cos\theta - \cos\alpha),$$

formule qui donne la vitesse pour toutes les valeurs de θ correspondant aux positions successives du mobile.

La formule (1) montre que la valeur numérique de la vitesse acquise par le mobile, de A en M, est la même que celle que posséderait un point pesant abandonné sans vitesse en P_0 et tombant de la hauteur P_0P égale à la hauteur dont est tombé le pendule de A en M.

Discussion. — Discutons la formule (2). Quand $\theta = 0$, le mobile est en A, $v = 0$. Quand le mobile descend, θ diminue; $\cos\theta$ augmente, v augmente. Au point le plus bas B, θ est nul, $\cos\theta$ atteint son maximum 1, la vitesse atteint également son maximum v_1. Puis le mobile remonte sur l'arc BA'; θ devient négatif et augmente en valeur absolue, $\cos\theta$ diminue, la vitesse diminue; quand le mobile arrive dans la positions M' placée à la même altitude que M, la vitesse v reprend la même valeur qu'en M. Enfin, au point A', à la même altitude que A, $\theta = -\alpha$, $v = 0$.

A ce moment, le mobile est en A′ avec une vitesse nulle. Sous l'action du poids, il retombe et il décrit l'arc A′BA suivant les mêmes lois, en repassant par les différents points de cet arc, avec la même valeur numérique de la vitesse qu'à l'aller, le sens seul de la vitesse étant changé. Le mobile arrive en A avec une vitesse nulle, puis il retombe et ainsi de suite.

Les résultats que nous venons d'obtenir seraient vrais en toute rigueur si le pendule se mouvait dans le vide, et s'il n'y avait aucun frottement au point d'attache. En réalité, le pendule subit une résistance de la part de l'air et le mécanisme de la suspension du fil en O oppose toujours une certaine résistance au mouvement du fil. C'est l'action de ces forces résistantes qui diminue peu à peu l'amplitude des oscillations.

EXERCICES SUR LES §§ IV, V ET VI

1. Un point de masse m se meut sur une droite Ox de telle façon que son abscisse x soit donnée en fonction de t par

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t,$$

x_0 et v_0 désignant l'abscisse et la vitesse du point pour $t = 0$. Exprimer en fonction de x la force X appliquée au point à chaque instant.

Réponse. — On a

$$X = mx'' = -m\omega^2 x.$$

Le mobile est attiré par O proportionnellement à la distance.

2. Même question pour un point mobile sur Ox d'après la loi

$$x = \sqrt{\frac{\mu t^2}{x_0^2} + (x_0 + v_0 t)^2}.$$

Réponse. — On a

$$X = \frac{m\mu}{x^3}.$$

3. Un projectile du poids de 10 kilogrammes est animé d'un mouvement de translation dont la vitesse est 100 mètres à la seconde, quel est, en kilogrammètres, le travail des forces extérieures qu'il faudrait faire agir sur le projectile pour l'arrêter ?

Réponse. — Ce travail est $\frac{P}{g}\frac{v^2}{2}$ kilogrammètres, c'est-à-dire

$$\frac{10}{9,8}\frac{100^2}{2} \text{ kilogrammètres.}$$

4. Un point pesant est abandonné sans vitesse sur une courbe fixe parfaitement polie. Quelle est sa vitesse dans chaque position ?

Réponse. — Quand le point est descendu d'une hauteur h sa vitesse est donnée par

$$\frac{v^2}{2} = gh.$$

5. Calculer l'angle α sous lequel il faut lancer de O un point pesant avec une vitesse v_0 donnée (nº 35), pour que la portée horizontale OB ait une valeur donnée (*fig.* 36).

Réponse. — Quand le problème est possible, il admet deux solutions correspondant à deux directions de v_0 symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle xOy. Le maximum de OB est la portée OA atteinte pour $\alpha = 45°$.

CHAPITRE III

STATIQUE DES CORPS SOLIDES LIBRES

§ I. — RÉDUCTION DES FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE

50. **Corps solides libres.** — En Physique, on divise les corps de la nature en *solides, liquides* et *gaz*. Nous nous occuperons ici des corps naturels appelés *solides,* comme une pierre, un morceau de métal, un morceau de caoutchouc, etc.

Un solide naturel est dit entièrement libre quand aucun obstacle extérieur ne gêne son mouvement. Par exemple, une pierre posée sur une table n'est pas entièrement libre, car la table empêche par sa résistance certains mouvements ; une porte n'est pas entièrement libre, car son articulation avec les gonds empêche certains mouvements.

Nous considérerons d'abord des solides entièrement libres, puis nous donnerons quelques exemples de solides gênés.

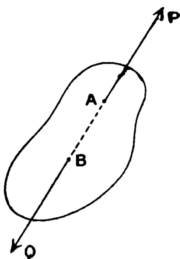
On dit qu'une force est appliquée à un corps solide quand elle agit sur un des points matériels dont l'ensemble constitue le corps solide. Ce point s'appelle le *point d'application de la force.*

On dit qu'un corps solide sollicité par plusieurs forces est en équilibre quand ce corps, abandonné à lui-même, sans vitesse, sous l'action des forces, *reste immobile sans se déformer.*

Il est évident qu'un corps solide libre sollicité par une seule force ne saurait être en équilibre. Le cas d'équilibre le plus simple possible est donc le cas d'un corps sollicité par deux forces.

51. **Corps solide libre sollicité par deux forces.** — Soit un solide libre sollicité par deux forces P et Q (*fig.* 47) appliquées en deux points A et B. Nous regarderons comme évident que, pour que le solide soit en équilibre, *il faut que les deux forces* P *et* Q *soient égales et directement opposées,* c'est-à-dire égales, parallèles, de sens contraires et dirigées suivant la droite AB joignant leurs points d'application.

Fig. 47.



Cette condition nécessaire de l'équilibre n'est pas toujours suffisante. Par exemple, si aux deux extrémités d'une tige métallique on applique deux forces égales et directement opposées, dirigées de façon à

tendre la tige, elles ne se font pas immédiatement équilibre : la tige s'allonge un peu, par conséquent se déforme, et prend, seulement après cette déformation, un certain état d'équilibre ; il peut même arriver, si les forces sont trop grandes, que la tige se rompe. Une tige métallique soumise à ses deux extrémités à des pressions égales et directement opposées est en équilibre si ces pressions ne dépassent pas certaines limites ; mais, si ces pressions sont trop grandes, la tige peut fléchir, etc.

Nous supposerons, dans tout ce qui suit, que les forces appliquées aux corps considérés sont assez petites et que ces corps eux-mêmes sont assez rigides pour qu'il n'y ait pas rupture et que la déformation soit négligeable. Alors la condition d'équilibre indiquée plus haut comme nécessaire est également *suffisante*.

En résumé, avec les restrictions que nous venons d'indiquer, *la condition nécessaire et suffisante pour que deux forces appliquées à un solide libre se fassent équilibre est qu'elles soient égales et directement opposées*.

Principe. — Nous admettrons, comme un fait résultant de ce qui précède, que, si un corps solide est sollicité par des forces en nombre quelconque, on peut, sans changer son état, ajouter aux forces qui agissent déjà deux forces égales et directement opposées, ou supprimer l'ensemble de deux forces égales et directement opposées quand il se rencontre un ensemble de ce genre.

52. **Opérations élémentaires.** — On peut, sans changer l'état d'un corps solide sollicité par des forces en nombre quelconque, leur faire subir les opérations suivantes que nous appellerons *opérations élémentaires :*

1° *On peut, sans changer l'état d'un solide, ajouter ou enlever un système de deux forces égales et directement opposées.*

2° *On peut, sans changer l'effet d'une force appliquée à un solide, la transporter en un point quelconque de sa ligne d'action, pourvu que ce nouveau point soit invariablement lié au solide.*

Fig. 48.

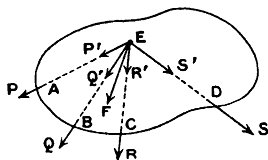


En effet, soit, entre autres, une force P appliquée en un point A d'un solide (*fig.* 48) ; prolongeons indéfiniment la ligne d'action AP de cette force et prenons sur cette ligne un point B quelconque invariablement lié au corps. Nous pouvons, sans changer l'état du corps, appliquer en B deux forces égales et directement opposées dont l'une, P', est égale à P en grandeur, direction, sens, et l'autre, — P', égale et directement opposée. Mais alors nous pouvons de nouveau, sans changer l'état du corps, supprimer les deux forces P et — P', égales et directement opposées ; nous avons donc, sans changer l'état du corps, remplacé la force AP par la nouvelle force BP' obtenue en transportant AP en un point de sa ligne d'action.

3° *On peut, sans changer l'état d'un solide, remplacer des forces concourantes par leur résultante, ou décomposer une force en des forces concourantes.*

Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait, entre autres, quatre forces P, Q, R, S (*fig.* 49) appliquées en quatre points A, B, C, D d'un solide de telle façon que leurs lignes d'action prolongées concourent en un même point E. Nous pouvons d'abord, d'après l'opération précédente, transporter chacune de ces forces au point E de sa ligne d'action et amener ainsi les quatre forces en P′, Q′, R′, S′. Mais alors les quatre forces sont appliquées à un même point matériel E et peuvent être remplacées par leur somme géométrique ou résultante F. Inversement, étant donnée une force F appliquée en E, on peut toujours la décomposer en forces appliquées au même point et ensuite transporter chacune de ces composantes en un point quelconque de sa ligne d'action.

Fig. 49.



Remarque. — Il peut arriver que les directions prolongées des forces concourantes P, Q, R, S se coupent en un point E ne faisant pas partie du corps : dans ce cas, pour pouvoir faire le raisonnement, il faut imaginer que l'on place en E un point matériel et que l'on relie invariablement ce nouveau point au corps.

53. **Invariance de la somme géométrique des forces et de leur moment résultant par rapport à un point.** — Étant données des forces F_1, F_2, ..., F_n appliquées à un solide, ces forces forment un système de vecteurs auquel on peut appliquer les constructions géométriques précédemment étudiées.

Faisons choix d'un point O et construisons la somme géométrique OR et le moment résultant OG des forces par rapport à ce point. Pour cela nous mènerons par O des vecteurs OF'_1, OF'_2, ..., OF'_n égaux et parallèles aux forces ; la somme OR de ces vecteurs sera la somme géométrique des forces. Puis nous construirons les moments linéaires OG_1, OG_2, ..., OG_n des forces par rapport à O ; leur somme géométrique OG sera le moment résultant des forces par rapport à O.

Ces définitions rappelées, on a le théorème suivant :

Les opérations élémentaires n'altèrent pas les deux vecteurs OR *et* OG.

En d'autres termes, si, en employant ces opérations, on transforme le système des forces en un autre, *ce nouveau système a la même somme géométrique* OR *et le même moment résultant* OG *que le premier.*

Pour le montrer, il suffit de montrer que les vecteurs OR et OG ne changent pas quand on effectue chacune des opérations élémentaires.

1° Quand on ajoute ou qu'on supprime deux forces égales et directement opposées, on ajoute ou l'on sup-

prime, à chacun des systèmes de vecteurs concourants ayant pour sommes géométriques OR et OG, deux vecteurs égaux et directement opposés, ce qui n'altère évidemment pas ces sommes.

2° Quand on transporte une force en un point de sa ligne d'action, on n'altère ni le vecteur égal et parallèle mené par O, ni le moment linéaire de cette force relatif au point O.

3° Quand on remplace plusieurs forces concourantes $F_1, F_2, \ldots, F_k$ par leur résultante Q, on doit remplacer, dans la construction de la somme géométrique OR de toutes les forces $F_1, F_2, \ldots, F_k, \ldots, F_n$, les vecteurs $OF'_1, OF'_2, \ldots, OF'_k$, égaux et parallèles à $F_1, F_2, \ldots, F_k$, par le vecteur OQ' égal et parallèle à leur résultante Q ; mais, comme OQ' est la somme géométrique de $OF'_1, OF'_2, \ldots, OF'_k$, cette opération revient à remplacer une partie des vecteurs concourants dont la somme géométrique est OR par leur somme, ce qui n'altère pas OR.

De même, quand on remplace plusieurs forces concourantes $F_1, F_2, \ldots, F_k$ par leur résultante Q, on doit remplacer, dans la construction du moment résultant OG de toutes les forces, les moments linéaires $OG_1, OG_2, \ldots, OG_k$ des forces $F_1, F_2, \ldots, F_k$ par le moment OH de leur résultante Q ; mais, comme le moment OH de la résultante de vecteurs concourants est égal à la somme des moments linéaires des composants, cette opération revient à remplacer une partie des mo-

ments linéaires dont la somme est OG par leur somme géométrique, ce qui n'altère pas OG.

Le théorème est donc démontré.

54. **Réduction des forces appliquées à un corps solide.** — A l'aide des opérations élémentaires, on peut, d'une infinité de manières, transformer un système de forces appliquées à un corps solide, sans changer son état. Il y a évidemment un grand intérêt à réduire ainsi les forces appliquées à un solide à des éléments aussi simples que possibles.

Les deux cas les plus simples sont : 1° le cas où les forces sont *concourantes* ; 2° le cas où elles sont *parallèles*.

Quand les forces sont concourantes elles peuvent, comme nous venons de le voir (n° 52), se réduire à une résultante unique R (*fig.* 49). Le moment linéaire de R, par rapport à un point quelconque, est la somme géométrique des moments des composantes. Si la résultante R est nulle, les forces concourantes se font équilibre.

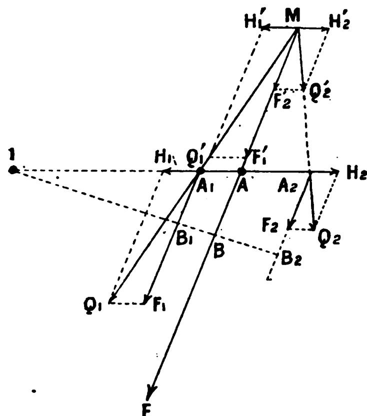
Examinons maintenant, en détail, le cas des forces *parallèles*.

§ II. — FORCES PARALLÈLES

55. **Deux forces parallèles.** — Nous commencerons par le cas de deux forces.

1° **Deux forces parallèles et de même sens.** — Soient deux forces parallèles et de même sens F_1 et F_2 appliquées en deux points A_1 et A_2 d'un corps solide (*fig.* 50). Nous allons montrer que ces deux forces ont une résultante unique et déterminer cette résultante. En vertu des opérations élémentaires, nous ne changerons pas l'état du corps en appliquant en A_1 et A_2 deux forces H_1 et H_2 égales et directement opposées. Composons F_1 et H_1 d'une part, F_2 et H_2 de l'autre ; nous aurons deux forces Q_1 et Q_2 qui concourent en un point M. Transportons-les au point M, en Q'_1 et Q'_2, puis décomposons Q'_1 en deux forces F'_1 et H'_1 égales et parallèles à F_1 et H_1, Q'_2 en deux forces F'_2 et H'_2 égales et parallèles à F_2 et H_2. Les forces H'_1 et H'_2 égales et directement opposées se détruisent ; les deux autres F'_1 et F'_2 dirigées dans le même sens, suivant la parallèle MA aux deux forces F_1 et F_2, se composent en une seule $F = F_1 + F_2$ parallèle aux composantes et de même sens qu'elles.

Fig. 50.



Pour déterminer la ligne d'action MA de cette force F,

il suffit de déterminer le point A où elle rencontre A_1A_2. Ce point est situé entre A_1 et A_2 : les triangles semblables $F_1Q_1A_1$ et AA_1M donnent

$$\frac{AA_1}{H_1} = \frac{MA}{F_1};$$

de même les triangles semblables $F_2Q_2A_2$ et AA_2M donnent

$$\frac{AA_2}{H_2} = \frac{MA}{F_2}.$$

Divisant membre à membre, avec la condition $H_1 = H_2$, on a

$$(1) \qquad \frac{AA_1}{AA_2} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Deux forces parallèles et de même sens ont une résultante parallèle de même sens, placée entre les composantes, égale à leur somme ; la ligne d'action de cette résultante divise la droite joignant les points d'application des composantes en deux segments inversement proportionnels aux composantes.

Ce théorème détermine la résultante des deux forces : comme on a le droit de la faire glisser le long de sa ligne d'action AM, son point d'application n'est pas déterminé.

Les points d'application A_1 et A_2 des composantes étant choisis, on convient de prendre comme point d'application de la résultante le point A où sa ligne d'action rencontre A_1A_2. En transportant la résultante au point A, on a alors la disposition de la figure 50.

Centre de deux forces parallèles. — Le point particulier A s'appelle le centre des deux forces parallèles F_1 et F_2 appliquées aux points A_1 et A_2. Si l'on suppose que les forces F_1 et F_2, tout en restant parallèles et conservant leurs intensités, tournent autour des points A_1 et A_2, la résultante F tourne aussi autour du point A. Le point A reste le même quand on modifie les intensités des composantes de telle façon que *leur rapport ne change pas.*

La proportion (1) peut s'écrire

$$\frac{F_1}{AA_2} = \frac{F_2}{AA_1} = \frac{F_1 + F_2}{AA_1 + AA_2}$$

ou

$$\frac{F_1}{AA_2} = \frac{F_2}{AA_1} = \frac{F}{A_1A_2}; \tag{2}$$

chacune des trois forces F_1, F_2, F est donc proportionnelle à la distance des points d'application des deux autres.

La même relation peut aussi s'écrire d'une manière simple, comme il suit. Soit I un point quelconque pris sur le prolongement de A_1A_2. On a, évidemment, $AA_1 = IA - IA_1$, $AA_2 = IA_2 - IA$; la relation (1) déterminant le point A devient alors

$$(IA - IA_1)\,F_1 = (IA_2 - IA)\,F_2$$

ou, en transposant,

$$(F_1 + F_2)\,IA = F_1.IA_1 + F_2.IA_2. \tag{3}$$

Si I était pris entre A_1 et A_2, on aurait la même

relation à condition de donner le signe + à ceux des segments IA, IA_1, IA_2 qui ont un certain sens et le signe — à ceux qui ont le sens contraire.

Remarque sur les moments. — Les forces F_1 et F_2 ayant été, par les opérations élémentaires, réduites à la seule force F, le moment linéaire de F par rapport à un point quelconque de l'espace est égal à la somme géométrique des moments linéaires des deux composantes par rapport au même point.

La relation (1) exprime ce fait pour un point I pris dans le plan des deux forces. En effet, abaissons du point I la perpendiculaire IB_1BB_2 sur les trois forces (*fig.* 50). Le point I étant placé comme dans la figure, les moments linéaires des trois forces, par rapport à I, sont tous trois perpendiculaires au plan de la figure, en avant de ce plan. Le moment de la résultante étant égal à la somme des moments des composantes, on a

$$F.IB = F_1.IB_1 + F_2.IB_2.$$

Mais les triangles semblables donnent immédiatement

$$\frac{IB}{IA} = \frac{IB_1}{IA_1} = \frac{IB_2}{IA_2},$$

on a donc aussi

$$F.IA = F_1.IA_1 + F_2.IA_2$$

ce qui est précisément la relation (3).

On pourra vérifier directement, comme exercice, que la ligne d'action de la résultante est le lieu des points

par rapport auxquels la somme géométrique des moments des composantes est nulle.

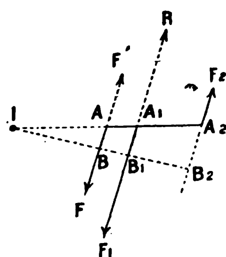
2° Deux forces parallèles inégales et de sens contraires. — Désignons par F_1 et F_2 les valeurs absolues des intensités de deux forces parallèles, de sens contraires, appliquées en A_1 et A_2 et supposons $F_1 > F_2$ (*fig.* 51).

Prenons, sur le prolongement de A_1A_2, un point A tel que

$$\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{F_2}{F_1}. \quad (4)$$

Ce point A sera situé du côté de la plus grande force F_1. Puis appliquons en A deux forces égales et directement opposées, d'intensité $F_1 - F_2$, parallèles à F_1 et F_2, l'une $F = F_1 - F_2$ ayant le sens de F_1, l'autre $F' = F_1 - F_2$ ayant le sens opposé. L'état du système n'est pas changé. Mais les deux forces F' et F_2 ont une résultante R égale et directement opposée à F_1. En effet, ces forces, parallèles et de même sens, ont une résultante R de même sens qu'elles, égale à leur somme qui est précisément

Fig. 51.



$$R = F' + F_2 = F_1$$

appliquée en un point divisant AA_2 en segments inversement proportionnels à F' et F_2; or le point A_1 remplit précisément cette condition, car la relation (4) donne

$$\frac{AA_1}{F_2} = \frac{AA_2}{F_1} = \frac{AA_2 - AA_1}{F_1 - F_2}$$

ou, en égalant le premier et le dernier rapport,

$$\frac{AA_1}{F_2} = \frac{A_1A_2}{F'}.$$

La résultante des forces F_2 et F' étant égale et directement opposée à F_1, l'ensemble des trois forces F_2, F', F_1 peut être supprimé et il reste la seule force F appliquée au point A.

Deux forces parallèles inégales et de sens contraires ont une résultante parallèle de même sens que la plus grande, placée à l'extérieur des composantes, égale à leur différence; la ligne d'action de cette résultante divise la droite joignant les points d'application des composantes en deux segments inversement proportionnels aux composantes.

Le point A, où la ligne d'action de la résultante rencontre la droite joignant les points d'application A_1 et A_2 des composantes, se nomme encore centre des forces parallèles : nous y supposerons la résultante appliquée. Dans ces conditions, la proportion (4) montre encore que chacune des trois forces F_1, F_2, F est proportionnelle à la distance des points d'applica-

tion des deux autres. En prenant un point I à l'extérieur du segment AA_2 on a

$$AA_1 = IA_1 - IA, \qquad AA_2 = IA_2 - IA$$

et la relation (4) qui détermine A peut s'écrire

$$(IA_1 - IA) F_1 = (IA_2 - IA) F_2$$

$$(F_1 - F_2) IA = F_1 . IA_1 - F_2 . IA_2, \tag{5}$$

relation qui se déduit de la relation analogue (3), pour les forces de même sens, par le seul changement de F_2 en $-F_2$.

On pourra répéter identiquement, pour le cas actuel, les remarques relatives aux moments faites dans le cas de deux forces de même sens.

3° **Deux forces parallèles égales et de sens contraires.** — Lorsque les deux forces F_1 et F_2 parallèles et de sens contraires sont *égales*, les raisonnements précédents *n'ont plus de sens,* car le point A que nous avons introduit devrait être extérieur au segment A_1A_2 et vérifier la relation

$$\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{F_2}{F_1} = 1.$$

Or un tel point n'existe pas, car tout point extérieur au segment A_1A_2 est plus près d'un des points A_1 ou A_2 que de l'autre. On dit quelquefois que le point A est rejeté à l'infini ; cela tient à ce que si F_1 d'abord supérieur à F_2 diminue et tend vers F_2, le point A

s'éloigne de plus en plus, pour disparaître quand $F_1 = F_2$.

L'ensemble de deux forces parallèles égales et de sens contraires forme un couple. Nous verrons plus loin qu'un couple ne peut pas être remplacé par une force unique. On a déjà vu, dans la théorie des vecteurs, que le moment résultant d'un couple est le même par rapport à tous les points de l'espace.

56. **Forces parallèles en nombre quelconque.** — Soit un corps solide sollicité par des forces parallèles, les unes tirant dans un sens, les autres en sens contraire. Pour obtenir des formules et des énoncés généraux, nous conviendrons de regarder comme positives les intensités des forces qui tirent dans un certain sens, comme négatives les intensités de celles qui tirent en sens contraire.

Nous appellerons $P_1, P_2, \ldots, P_n$ les valeurs algébriques des forces ainsi définies.

Par exemple, si nous avons trois forces de 20, 30, 40 dynes tirant dans le sens regardé comme positif et deux forces de 60 et 80 dynes tirant dans le sens opposé, nous prendrons

$$P_1 = +20, \quad P_2 = +30, \quad P_3 = +40,$$
$$P_4 = -60, \quad P_5 = -80.$$

57. **Cas où la somme algébrique des intensités des forces n'est pas nulle.** — *Si la somme*

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$$

n'est pas nulle, les forces parallèles considérées admettent une résultante unique qui leur est parallèle, dont l'intensité a pour valeur algébrique P *et qui est appliquée en un certain point, indépendant de la direction commune des forces, appelé centre des forces parallèles.*

Ce théorème a été établi pour deux forces (n° 55). Appelons F_1 et F_2 les valeurs absolues des intensités des deux forces appliquées en A_1 et A_2. Si les forces sont de même sens, les intensités des forces et de leur résultante ont pour valeurs algébriques

$$(6) \qquad \begin{cases} P_1 = F_1, \quad P_2 = F_2 \\ P = P_1 + P_2 = F_1 + F_2. \end{cases}$$

Si elles sont de sens contraires, les forces et leur résultante ont pour valeurs algébriques

$$(7) \qquad \begin{cases} P_1 = F_1, \quad P_2 = -F_2 \\ P = P_1 + P_2 = F_1 - F_2. \end{cases}$$

Dans les deux cas, la résultante est appliquée en un point A, situé sur A_1A_2, indépendant de la direction commune des forces. En choisissant un point I à l'extérieur du segment qui comprend les trois points AA_1A_2 nous avons trouvé successivement, pour les deux cas, les relations

$$(F_1 + F_2)\,IA = F_1 \,.\, IA_1 + F_2 \,.\, IA_2$$
$$(F_1 - F_2)\,IA = F_1 \,.\, IA_1 - F_2 \,.\, IA_2$$

qui, d'après les conventions de signes (6) et (7), s'écrivent sous forme unique

$$(8) \qquad P \,.\, IA = P_1 \,.\, IA_1 + P_2 \,.\, IA_2.$$

Prenons maintenant le cas général.

Soient n forces parallèles ayant pour valeurs algébriques P_1, P_2, . . . , P_n et supposons que leur somme géométrique

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n = \Sigma P_k$$

soit différente de zéro. Supposons les composantes appliquées en des points déterminés A_1, A_2, . . . , A_n, et imaginons, pour fixer les idées, que les forces P_1, P_2, . . . , P_m tirent dans un sens, et les forces P_{m+1}, P_{m+2}, . . . , P_n en sens contraire. Nous pourrons, d'après ce qui précède, remplacer P_1 et P_2 par une force unique $Q_1 = P_1 + P_2$ appliquée au centre C_1 des forces parallèles P_1 et P_2 ; puis nous remplacerons les forces Q_1 et P_3 par une force

$$Q_2 = Q_1 + P_3 = P_1 + P_2 + P_3$$

appliquée au centre C_2 des forces parallèles Q_1 et P_3 ; et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous ayons remplacé toutes les forces tirant dans un sens par une force unique P' appliquée en un point déterminé C' ; de même, nous remplacerons toutes les forces tirant en sens contraire par une force unique P'' appliquée en un point déterminé C''. Ces deux forces se composent enfin en une

$$P = P' + P'' = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$$

appliquée au centre C des forces P' et P'' appliquées en C' et C''.

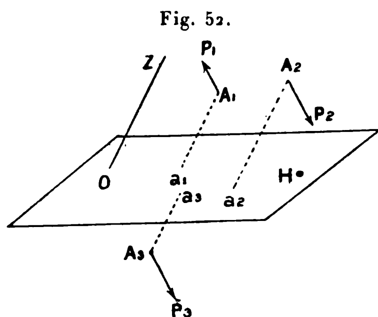
Ce point final C est le centre des forces parallèles données.

Si l'on fait tourner ces forces autour de leurs points d'application en les laissant parallèles, sans altérer leurs rapports mutuels, les forces auxiliaires Q_1, Q_2, ..., P', P'' tournent autour de leurs points d'application C_1, C_2, ..., C', C'' sans que leurs rapports mutuels changent, et, finalement, la résultante tourne autour du point C.

Il suffira donc de déterminer ce point C pour connaître la résultante, puisque sa grandeur, sa direction et son sens sont connus.

Détermination analytique du centre des forces parallèles. Moments par rapport à un plan. — Pour déterminer la position du centre des forces parallèles, il est commode d'introduire certains produits appelés *moments par rapport à un plan.*

Fig. 52.



Prenons un plan fixe H (*fig.* 52) et un axe OZ ayant son origine dans le plan et faisant avec lui un angle différent de zéro. Appelons z_1, z_2, ..., z_n les cotes des différents points d'application A_1, A_2, ..., A_n des forces parallèles, par rapport au plan ; ces cotes sont

comptées parallèlement à l'axe OZ : elles sont positives pour les points situés, par rapport au plan H, du même côté que OZ, négatives pour les points situés de l'autre côté. Ainsi, sur la figure 52, en menant A_1a_1, A_2a_2, A_3a_3 parallèlement à OZ jusqu'à leur rencontre en a_1, a_2, a_3 avec le plan H, on aura

$$z_1 = A_1a_1, \quad z_2 = A_2a_2, \quad z_3 = - A_3a_3.$$

Ceci posé, on appelle moment de la force P_k par rapport au plan H le produit

$$P_k z_k$$

obtenu en multipliant la valeur algébrique P_k de la force par la valeur algébrique z_k de la cote de son point d'application A_k. Le moment ainsi défini est une quantité positive, négative ou nulle, dont la valeur dépend du point d'application de la force, de sorte que ce moment change quand on transporte la force en un point de sa ligne d'action.

La propriété fondamentale résultant de cette définition est la suivante :

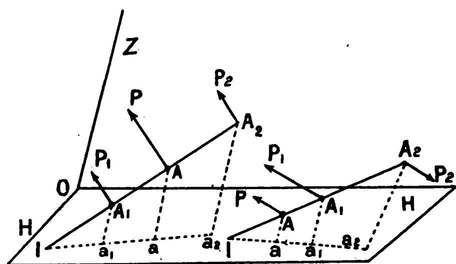
Quand la somme algébrique des forces parallèles est différente de zéro, le moment, par rapport à un plan, de la résultante de ces forces est égal à la somme algébrique des moments des composantes, à condition de prendre, pour point d'application de la résultante, le centre des forces parallèles.

Pour démontrer cette proposition, prenons d'abord deux forces P_1 et P_2 appliquées aux points A_1 et A_2 et

ayant une résultante $P = P_1 + P_2$ appliquée au point A centre des deux forces parallèles. Supposons que le plan H, par rapport auquel on prend les moments, soit placé de telle façon que les trois points A_1, A_2, A aient leurs cotes

$$z_1 = A_1 a_1, \qquad z_2 = A_2 a_2, \qquad z = Aa$$

Fig. 53.



positives (*fig.* 53). Soit I le point où la droite AA_1A_2 perce le plan H. On a, dans tous les cas,

$$P \,.\, IA = P_1 \,.\, IA_1 + P_2 \,.\, IA_2\,;$$

mais les triangles semblables IAa, IA_1a_1, IA_2a_2, donnent

$$\frac{IA}{z} = \frac{IA_1}{z_1} = \frac{IA_2}{z_2}.$$

On a donc aussi

$$(9) \qquad Pz = P_1 z_1 + P_2 z_2,$$

ce qui démontre le théorème, car Pz est le moment de

la résultante, $P_1 z_1$ et $P_2 z_2$ les moments des composantes. Le raisonnement serait en défaut si la droite AA_1A_2 était parallèle au plan H, car I n'existerait plus; mais alors

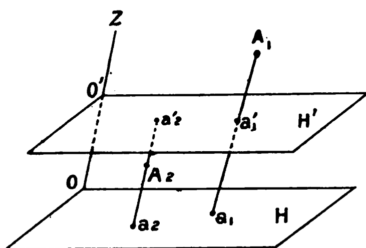
$$z = z_1 = z_2$$

et la relation (9) à démontrer se réduit à la relation évidente

$$P = P_1 + P_2.$$

Nous avons supposé les trois cotes positives. Imaginons un plan H′ (*fig.* 54) parallèle au premier rencontrant OZ en un point O′ de cote positive *h*: les points A, A_1, A_2 auront par rapport à ce nouveau plan des cotes z', z'_1, z'_2 pouvant avoir des signes quelconques. On a évidemment

Fig. 54.



$$z = z' + h, \qquad z_1 = z'_1 + h$$
$$z_2 = z'_2 + h.$$

La relation (9) donne alors

$$Pz' + Ph = P_1 z'_1 + P_2 z'_2 + (P_1 + P_2)h.$$

Comme P est égal à $P_1 + P_2$, les termes en *h* disparaissent et il reste la relation

$$Pz' = P_1 z'_1 + P_2 z'_2$$

qui montre que le même théorème s'applique au plan H', quels que soient les signes des cotes.

Le théorème, étant ainsi établi pour deux forces parallèles, s'étend aisément au cas de n forces parallèles P_1, P_2, ..., P_n appliquées en des points A_1, A_2, ..., A_n dont les cotes sont z_1, z_2, ..., z_n par rapport au plan H. Nous supposerons, comme plus haut, que les forces P_1, P_2, ..., P_m sont positives, P_{m+1}, P_{m+2}, ..., P_n négatives.

Les forces P_1 et P_2 ont une résultante Q_1 appliquée au point C_1 de cote c_1, et l'on a

$$Q_1 c_1 = P_1 z_1 + P_2 z_2.$$

Les forces Q_1 et P_3 ont une résultante Q_2 appliquée au point C_2 de cote c_2, et l'on a

$$\begin{aligned} Q_2 c_2 &= Q_1 c_1 + P_3 z_3 \\ &= P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3. \end{aligned}$$

Les forces Q_2 et P_4 ont une résultante Q_3 appliquée au point C_3 de cote c_3, et l'on a

$$\begin{aligned} Q_3 c_3 &= Q_2 c_2 + P_4 z_4 \\ &= P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 + P_4 z_4 \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Les forces P_1, P_2, ..., P_m tirant dans un sens, ont une résultante P', égale à leur somme, appliquée en un point C' de cote z', et l'on a

$$(10) \qquad P'z' = P_1 z_1 + P_2 z_2 + \ldots + P_m z_m.$$

Les forces P_{m+1}, ..., P_n, tirant en sens contraire,

ont de même une résultante P″ égale à leur somme appliquée en un point C″ de cote z″ et l'on a

$$(11) \qquad P''z'' = P_m z_m + \ldots + P_n z_n.$$

Enfin les deux forces P′ et P″ ont une résultante

$$P = P' + P'' = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$$

appliquée au centre C des forces parallèles de cote z_0 et l'on a

$$Pz_0 = P'z' + P''z''$$

ou enfin

$$(12) \qquad Pz_0 = P_1 z_1 + P_2 z_2 + \ldots + P_n z_n,$$

égalité qui démontre le théorème des moments dans sa généralité.

Coordonnées du centre des forces parallèles. — Soient trois axes Ox, Oy, Oz formant un trièdre. Appelons $z_1, z_2 \ldots, z_n$ les cotes des points d'application $A_1, A_2 \ldots A_n$ des forces parallèles par rapport au plan xOy, ces cotes étant comptées parallèlement à Oz. Appelons de même $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les cotes de ces points par rapport aux plans yOz et zOx comptées parallèlement aux axes Ox et Oy. Soient enfin x_0, y_0, z_0 les cotes du centre C des forces parallèles. On aura d'après le théorème des moments

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_0 &= \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \cdots + P_n x_n}{P_1 + P_2 + \cdots + P_n} \\ y_0 &= \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + \cdots + P_n y_n}{P_1 + P_2 + \cdots + P_n} \\ z_0 &= \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + \cdots + P_n z_n}{P_1 + P_2 + \cdots + P_n} \end{aligned} \right.$$

formules qui déterminent le point C, à condition que la somme $P_1 + P_2 + \cdots + P_n$ soit différente de zéro.

58. **Cas où la somme algébrique des intensités des forces est nulle.** — Dans ce cas, on pourra commencer la réduction comme dans le cas général (n° 57). Les forces $P_1, P_2, \ldots, P_n$, dirigées dans un sens, ont une résultante P' égale à leur somme appliquée en un point C' centre de ces forces parallèles; les forces $P_{m+1}, \ldots, P_n$, dirigées en sens contraire, ont une résultante P'', égale à leur somme, appliquée en un point C'', centre de ces forces parallèles. Mais actuellement

$$P' + P'' = 0,$$

les forces P' et P'' sont égales et opposées. Deux cas sont à distinguer.

1° *La direction* $C'C''$ *n'est pas parallèle aux forces*: alors les deux forces P' et P'' forment *un couple*: les forces parallèles considérées se réduisent à un couple.

2° *La direction* $C'C''$ *est parallèle aux forces*: alors les deux forces P' et P'' sont égales et directement opposées; les forces considérées se font équilibre.

59. **Centre de gravité.** — Nous avons déjà défini le *poids* d'un point matériel: c'est une force verticale dont l'intensité p est égale à la masse du point matériel multipliée par l'accélération g due à la pe-

santeur, accélération qui, en un même lieu, est la même pour tous les points pesants. La direction de la verticale change d'un lieu à l'autre; l'observation a prouvé que la valeur de g varie avec la latitude et l'altitude; mais ces variations sont insensibles dans l'étendue d'un corps de dimensions ordinaires. Un corps solide pesant peut donc être considéré comme une réunion d'un grand nombre de points matériels liés entre eux et sollicités par des forces verticales parallèles proportionnelles à leurs masses. La résultante de ces forces, qui est égale à leur somme, s'appelle le *poids du corps*. Le centre de ces forces parallèles se nomme spécialement *centre de gravité;* il occupe dans le corps une position indépendante de l'orientation de celui-ci; car, lorsque le corps se déplace, tout se passe, pour un observateur entraîné avec lui, comme si, le corps restant immobile, les forces parallèles tournaient d'un même angle autour de leurs points d'application, ce qui n'altère pas la position du centre des forces parallèles. Ainsi, *le centre de gravité est le point du corps par lequel passe constamment le poids du corps, quelle que soit son orientation*. Si donc on fixait le centre de gravité en laissant au corps solide la liberté de tourner autour de ce point, le corps, soumis uniquement à l'action de la pesanteur, resterait en équilibre dans toutes les positions qu'il pourrait prendre.

60. **Expressions des coordonnées du centre de gravité.** — Soient $m_1, m_2, \ldots, m_n$ les masses;

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ les poids des points matériels qui constituent un corps solide; $(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2), \ldots,$ (x_n, y_n, z_n) leurs coordonnées; P et M le poids et la masse du corps. On aura

$$p_k = m_k g, \qquad P = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = Mg.$$

Si l'on désigne par (x_0, y_0, z_0) les coordonnées du centre de gravité, on a, d'après les formules qui donnent le centre des forces parallèles,

$$x_0 = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

ou, sous forme abrégée,

$$x_0 = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}, \qquad y_0 = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}, \qquad z_0 = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m}.$$

On voit, d'après ces formules, que la position du centre de gravité dépend uniquement des *masses* des points.

Cette observation est importante, car elle permet d'étendre la notion de centre de gravité à des systèmes non pesants. Même, dans certaines questions relatives à des points matériels de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ *non invariablement* liés entre eux, il est utile d'introduire le point dont les coordonnées x_0, y_0, z_0 sont définies par les formules précédentes; ce point qu'Euler proposait d'appeler *centre d'inertie* continue à porter le nom de *centre de gravité,* quoique les considérations

qui conduisent à la notion du centre de gravité ne soient plus applicables.

Le centre de gravité est évidemment situé à l'intérieur de toute surface convexe entourant les points considérés.

Lorsque l'on connaît les centres de gravité G_1 et G_2 de deux parties d'un corps et leurs masses M_1 et M_2, on en déduit immédiatement le centre de gravité du corps, car ce centre est le centre des forces parallèles $M_1 g$ et $M_2 g$ appliquées aux deux points G_1 et G_2. D'une manière générale, lorsque l'on connaît les centres de gravité $G_1, G_2, \ldots, G_p$ de plusieurs parties d'un corps et leurs masses, $M_1, M_2, \ldots, M_p$, le centre de gravité du corps est le centre des forces parallèles $M_1 g, M_2 g, \ldots, M_p g$ appliquées aux points $G_1, G_2, \ldots, G_p$. En appelant $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_p, y_p, z_p$ les coordonnées des centres de gravité de ces diverses parties, on aura pour les coordonnées x_0, y_0, z_0 du centre de gravité du corps

$$x_0 = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots + M_p x_p}{M_1 + M_2 + \cdots + M_p},$$

$$y_0 = \frac{\Sigma M y}{\Sigma M}, \qquad z_0 = \frac{\Sigma M z}{\Sigma M}.$$

Quand on veut déterminer le centre de gravité d'un corps solide de forme donnée, par exemple d'une masse de métal, on doit appliquer les formules précédentes à un corps formé d'un nombre extrêmement grand de points matériels situés à des distances mutuelles extrêmement petites. On tourne la difficulté en

regardant le corps comme continu, ce qui n'est pas conforme à la réalité, mais fournit une approximation très suffisante pour les applications. On supposera le corps divisé en parties infiniment petites, en petits cubes par exemple, et l'on appliquera les formules précédentes.

Lorsqu'un corps a une épaisseur très petite par rapport à ses autres dimensions, on assimile le corps à une surface : telle est, par exemple, une feuille de papier ou de métal très mince. De même, il est des cas où l'on peut considérer un corps comme réduit *à une ligne* : tel est le cas d'un fil long et fin.

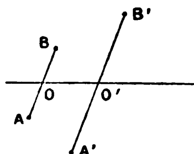
61. **Théorèmes relatifs aux centres de gravité :**

1° *Lorsqu'un système matériel admet un centre de symétrie, son centre de gravité se confond avec le centre de symétrie.* — En effet, le système tout entier peut être partagé en éléments matériels très petits deux à deux symétriques et de même masse ; la droite qui joint deux d'entre eux passe par le centre de symétrie qui est son milieu ; par conséquent la résultante des forces égales et parallèles appliquées aux extrémités de cette droite passe aussi par son milieu ; comme il en est de même de toutes les résultantes semblablement obtenues, la résultante totale passe par le centre de symétrie.

2° *Lorsqu'un système matériel plan admet un diamètre rectiligne conjugué d'une direction de cordes, le centre de gravité du système est sur ce diamètre.* — On dit qu'un système plan admet un diamètre D conjugué

d'une direction de corde D', quand on peut le diviser en couples d'éléments matériels A et B, tels que A ait même masse que B, que les cordes AB soient parallèles à la direction D' et que leurs milieux soient sur la droite D (*fig.* 55). Dans ces conditions, le centre de gravité de chaque couple d'éléments A et B est sur la droite D; le centre de gravité du système total s'y trouve également.

Fig. 55.



3° *Lorsqu'un système matériel admet un plan diamétral conjugué d'une certaine direction de cordes, le centre de gravité du système est dans ce plan.* — On dit qu'un système matériel admet un plan diamétral P conjugué d'une direction de cordes D', quand on peut le diviser en couples d'éléments matériels A et B de même masse, tels que toutes les cordes AB soient parallèles à la direction D' et que leurs milieux soient dans le plan P. Dans ces conditions, le centre de gravité de chaque couple d'éléments A et B est dans le plan P et le centre de gravité de tout le système s'y trouve également.

62. Détermination de quelques centres de gravité :

I. Centres de gravité des lignes planes. — Nous considérons exclusivement des lignes *homogènes*. Une ligne matérielle est dite *homogène* quand la masse d'une portion quelconque de cette ligne est proportionnelle à sa longueur.

Segment de droite. — Le centre de gravité d'un segment de droite est en son milieu qui est un centre de symétrie.

Circonférence de cercle. — Le centre de gravité d'une circonférence est en son centre.

Contour d'un polygone régulier. — Chaque droite joignant le centre O du cercle circonscrit à un sommet est un axe de symétrie : le centre de gravité, étant sur chacune de ces droites, est au point O.

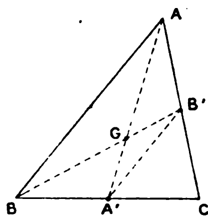
II. **Centres de gravité des aires planes.** — Nous considérerons exclusivement des aires *homogènes*, c'est-à-dire telles que la masse d'une portion quelconque de l'aire soit proportionnelle à son étendue.

Cercle. — Le centre de gravité d'un cercle est en son centre, qui est un centre de symétrie.

Parallélogramme. — Le centre de gravité d'un parallélogramme est en son centre, qui est un centre de symétrie.

Aire d'un triangle. — Chaque médiane est un diamètre conjugué par rapport aux cordes parallèles au côté correspondant. Chacune d'elles, AA′ par exemple (*fig.* 56), divise, en effet, en deux parties égales toutes les cordes parallèles à BC. Le centre de gravité de l'aire du triangle se trouve donc au point de rencontre des médianes ; joignons A′B′, cette droite est parallèle à AB et égale à sa moitié ; la considération des

Fig. 56.



triangles semblables ABG, A'B'G montre que l'on a

$$\frac{AG}{A'G} = \frac{AB}{A'B'} = 2.$$

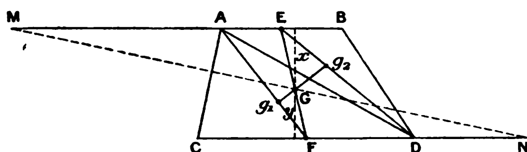
Le centre de gravité est donc aux $\frac{2}{3}$ de la médiane à partir du sommet.

On montrera, à titre d'exercice, que le poids total P d'un triangle est la résultante de trois poids égaux à $\frac{1}{3}$ P appliqués aux trois sommets.

Trapèze. — Soit ABCD un trapèze (*fig.* 57); son centre de gravité se trouve sur la droite EF qui joint les milieux de ses bases parallèles, cette droite étant un diamètre pour les droites parallèles aux bases AB et CD.

Traçons la diagonale AD : les deux triangles ACD et ABD ont leurs centres de gravité en g_1 et g_2 sur les médianes

Fig. 57.



AF et DE. Le centre de gravité G est donc au point de rencontre des droites $g_1 g_2$ et EF. Aux points g_1 et g_2 sont appliquées des forces proportionnelles aux aires des triangles ACD et ABD, et par suite à leurs bases CD et AB, puisqu'ils ont même hauteur. Le point G est donc déterminé sur la droite $g_1 g_2$ par le rapport

$$\frac{g_1G}{g_2G} = \frac{AB}{CD}.$$

Désignons par x et y les distances de G à AB et à CD et leur somme $x+y$ par h et appliquons le théorème des moments par rapport à deux plans passant par AB et par CD et perpendiculaires au plan du trapèze ; on a, en appelant b et B les bases,

$$(B+b)x = 2B\frac{h}{3} + b\frac{h}{3},$$

$$(B+b)y = B\frac{h}{3} + 2b\frac{h}{3},$$

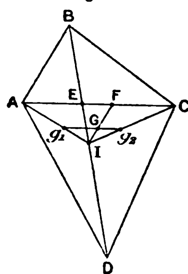
d'où

$$\frac{x}{y} = \frac{2B+b}{B+2b} = \frac{B+\frac{b}{2}}{\frac{B}{2}+b}.$$

Ce qui montre que, si l'on porte à gauche de A une longueur AM = B et à droite de D une longueur DN = b, la droite MN passe par le point G.

Quadrilatère. — Soit ABCD un quadrilatère (*fig.* 58); la diagonale BD détermine deux triangles dont les centres de gravité g_1, g_2 sont sur les médianes AI et CI aux $\frac{2}{3}$ à partir des sommets. Les poids appliqués en g_1 et g_2 sont proportionnels aux aires de ces triangles, et, comme ils ont même base, ces poids sont proportionnels à AE et CE. Le centre de gravité G est défini par le rapport

Fig. 58.



$$\frac{g_1G}{g_2G} = \frac{CE}{AE}.$$

Il suffit donc de prendre CF = AE et de joindre IF pour avoir le point G. Il suffit même de remarquer que G est au tiers de IF pour avoir une construction plus simple.

Polygone. — Il faut décomposer le polygone en triangles, appliquer au centre de gravité de chaque triangle une force de direction constante proportionnelle à l'aire du triangle et chercher le centre de ces forces parallèles.

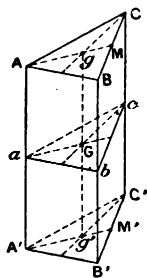
III. Centres de gravité des volumes. — Nous considérerons encore des volumes *homogènes*, c'est-à-dire tels que la masse d'une portion quelconque du volume soit proportionnelle à son étendue.

Parallélépipède. — Le centre de gravité est au centre du parallélépipède qui est un centre de symétrie.

Sphère. — Le centre de gravité est au centre de la sphère.

Prisme triangulaire. — Le prisme triangulaire a quatre plans diamétraux, à l'intersection desquels se trouve son centre de gravité : 1° le plan de la *section moyenne* passant par les milieux *a*, *b*, *c* des arêtes, qui est un plan diamétral pour toute droite parallèle aux arêtes ; 2° les trois plans qui passent par une arête et par la médiane correspondante du triangle de base ; AA'MM' est l'un d'eux (*fig.* 59), il est plan diamétral pour toutes les droites parallèles à BC.

Fig. 59.



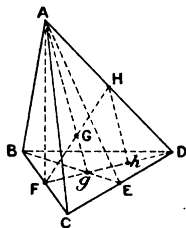
Le centre de gravité G est donc sur l'intersection de deux de ces plans, c'est-à-dire sur la ligne gg' qui joint les centres de gravité des bases ; comme il est dans le plan *abc*, on voit que : le centre de gravité d'un

prisme triangulaire est au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases : il coïncide avec le centre de gravité de la section moyenne.

Prisme polygonal. — On décompose le prisme en prismes triangulaires au moyen de plans menés par ses arêtes latérales ; les centres de gravité de ces prismes coïncident avec les centres de gravité des triangles en lesquels est décomposée la section moyenne et les poids des prismes sont proportionnels aux aires des triangles ; par conséquent, le centre de gravité du prisme polygonal coïncide avec le centre de gravité de sa section médiane.

Tétraèdre. — Tout plan qui passe par une arête et le milieu de l'arête opposée est un plan diamétral relativement aux cordes parallèles à cette dernière arête et renferme le centre de gravité ; le tétraèdre comporte autant de plans diamétraux de cette espèce que d'arêtes, c'est-à-dire six.

Fig. 60.



Soient ABE et ADF deux de ces plans ; ils se coupent suivant la droite Ag, g étant le centre de gravité de la face BCD. Dans le troisième plan BCH, la droite FH coupe Ag au centre de gravité G (*fig.* 60).

Menons Hh parallèle à Gg ; h est le milieu de gD ; les points h et g partagent donc la droite FD en trois parties égales. Il en résulte que Gg est la moitié de Hh, qui est lui-même la moitié de Ag ; donc le centre de gravité d'un tétraèdre est situé au quart, à partir d'une face, de la droite qui joint le centre de gravité de cette face au sommet opposé.

Le point G étant le milieu de FH, le centre de gravité d'un tétraèdre est au milieu de l'une des droites qui joignent les milieux de deux arêtes opposées.

Il résulte encore du premier énoncé que le centre de gravité du tétraèdre coïncide avec le centre de gravité du triangle suivant lequel il est coupé par un plan mené parallèlement à une face et à une distance de cette face égale au quart de la hauteur correspondante.

Enfin on peut remarquer que le poids P d'un tétraèdre est la somme de quatre poids égaux à $\frac{1}{4}$ P appliqués aux quatre sommets.

Pyramide. — On décompose la pyramide en tétraèdres au moyen de plans menés par ses arêtes latérales ; le centre de gravité de la pyramide coïncide avec celui du polygone suivant lequel elle est coupée par un plan mené parallèlement à sa base et à une distance égale au quart de la hauteur de la pyramide ; le centre de gravité est donc au quart, à partir de la base, de la droite qui joint le sommet au centre de gravité du polygone de base.

§ III. — COUPLES

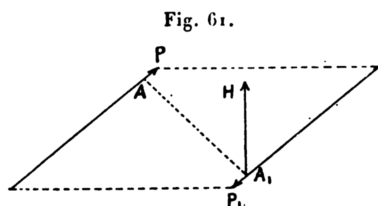
63. **Couple.** — On appelle *couple de forces* ou simplement *couple* l'ensemble de deux forces égales, parallèles et de sens contraires appliquées à un corps solide. En supposant que P soit l'intensité commune des deux forces, nous désignerons ordinairement l'une des forces par la notation P, l'autre par la notation P_1.

Axe d'un couple. — Soit B un point quelconque de l'espace : on a vu, dans la théorie des vecteurs, que le moment résultant BH des deux forces P et P_1 *est le même en grandeur, direction et sens, quel que soit le point* B.

Ce moment résultant s'appelle l'*axe du couple*.

L'axe d'un couple est ainsi un vecteur défini en grandeur, direction et sens, mais non en position, car son point d'application est un point quelconque B de l'espace. Pour obtenir les éléments de cet axe (grandeur, direction et sens), il suffit de prendre le moment résultant du couple par rapport à un point particulier, par exemple par rapport au point A_1 pris sur l'une des forces P_1 du couple ; l'axe du couple est le moment résultant des deux vecteurs P et P_1 par rapport au point A_1 (*fig.* 61) ;

Fig. 61.



comme le moment de P_1 est nul, l'axe se réduit au moment linéaire A_1H de P par rapport au point A_1 ; il est donc égal au produit de P par la plus courte distance AA_1 des deux vecteurs, perpendiculaire au plan du couple et dirigé dans un sens tel qu'un mobile suivant P tourne autour de A_1H dans le sens positif. La distance des deux forces est le *bras de levier du couple* ; la grandeur $P \times AA_1$ de l'axe est le *moment du couple*. On peut remarquer que ce mo-

ment est égal à l'aire du parallélogramme construit sur les deux forces du couple.

Quand le moment d'un couple est nul, ou bien le facteur P est nul et les deux forces du couple sont nulles, ou bien le bras de levier AA_1 est nul, les deux forces sont égales et directement opposées, et l'on peut les supprimer.

64. Théorème fondamental. — *On peut, sans changer l'état d'un solide, remplacer un couple qui lui est appliqué par un autre couple, pourvu que l'axe de ce second couple soit égal, en grandeur, direction et sens, à l'axe du premier.*

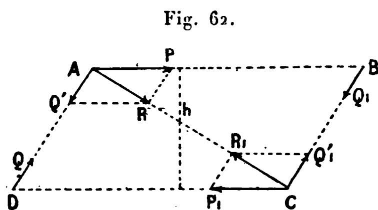
D'une façon concise, on énonce ce théorème en disant que *deux couples de même axe sont équivalents.*

Pour démontrer ce théorème, nous montrerons qu'*on peut, par des opérations élémentaires, transformer un couple en un autre quelconque de même axe.*

Nous distinguerons deux cas dans la démonstration:

1° Les couples de même axe qu'on veut transformer l'un dans l'autre sont situés *dans un même plan.*

Fig. 62.



Supposons d'abord que les forces des deux couples ne soient pas parallèles; les directions de ces forces forment alors un parallélogramme ABCD (*fig.* 62); comme on peut

transporter une force en un point de sa direction, on peut appliquer les forces des deux couples aux quatre sommets du parallélogramme, ceux du premier aux sommets A et C en P et P_1, ceux du deuxième aux sommets D et B en Q et Q_1.

Soit h la distance des droites AB et DC : le moment du premier couple Ph est à l'aire du parallélogramme $AB.h$ comme AP est à AB. De même le moment du second est à l'aire du parallélogramme comme DQ est à AD ; on a donc, ces moments étant égaux,

$$(1) \qquad \frac{P}{Q} = \frac{AB}{AD}.$$

Les axes des deux couples sont alors égaux et parallèles : pour qu'ils soient de même sens (tous deux dirigés en avant du plan de la figure), il faut que les forces soient disposées dans le même sens de circulation sur le périmètre du parallélogramme.

Cela posé, partons du couple P, P_1 et ajoutons, suivant le côté AD, deux forces égales et directement opposées, la force Q et une force Q' appliquée en A ; de même ajoutons, suivant BC, deux forces égales et directement opposées $Q_1 Q'_1$ appliquées en B et C. Nous aurons un système de forces équivalent au couple P, P_1 : mais l'ensemble P, P_1, Q', Q'_1 est équivalent à zéro, car les deux forces P et Q' ont une résultante R qui, d'après la proportion (1), est dirigée suivant la diagonale AC, et les deux forces P_1 et Q'_1 ont une résultante R_1 dirigée suivant CA, c'est-à-dire égale et directement opposée

à R ; nous pouvons donc supprimer les forces P, P_1, Q', Q'_1 qui se détruisent et il reste le couple Q, Q_1 équivalent au premier.

Lorsque les forces des deux couples de même axe P, P_1, Q, Q_1 situés dans un même plan sont parallèles, le raisonnement précédent ne s'applique plus ; mais si, dans le même plan, on considère un couple auxiliaire F, F_1 de même axe que les deux proposés, ayant ses forces obliques sur celles des proposés, on peut, d'après ce qui précède, transformer P, P_1 en F, F_1, puis F, F_1 en Q, Q_1 c'est-à-dire finalement P, P_1 en Q, Q_1.

En résumé, on peut transporter un couple à volonté dans son plan et modifier son bras de levier et ses forces, pourvu que son axe ne change pas.

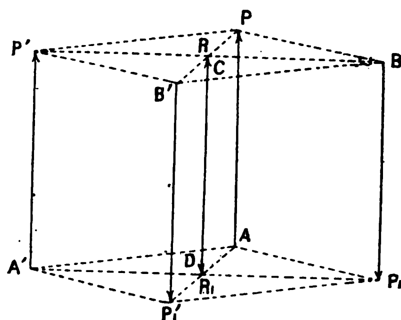
2° Démontrons maintenant qu'on peut transporter un couple dans un plan parallèle au sien et modifier son bras de levier et ses forces, pourvu que son axe ne change pas.

Pour cela, il suffit de démontrer qu'on peut transporter un couple parallèlement à lui-même, dans un plan parallèle au sien : une fois le couple transporté dans ce plan, on le modifiera conformément aux règles du premier cas.

Soient P, P_1 (*fig.* 63) un couple et P', P'_1 le même couple transporté parallèlement à lui-même hors de son plan : A, B, A', B' les points d'application des forces des deux couples. Construisons un parallélépipède ayant ces quatre forces pour arêtes opposées et

prenons les points d'intersection C et D des diagonales des deux faces PP'BB', $P_1P'_1AA'$. Partons du premier couple P, P_1 et suivant CD appliquons deux forces R, R_1 égales directement opposées et égales à CD, c'est-à-dire à P. Le couple P, R_1 peut être remplacé, d'après le cas précédent, par le couple R, P'_1 situé dans le

Fig. 63.

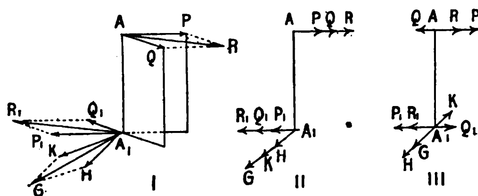


même plan que lui; le couple P_1, R peut, de même, être remplacé par R_1, P' : le couple primitif est ainsi remplacé par les deux R, P'_1 et R_1, P' qui se réduisent évidemment à P', P'_1 par la suppression des forces R, R_1 égales et directement opposées.

65. **Composition des couples.** — *Des couples en nombre quelconque peuvent être remplacés par un couple unique dont l'axe est la somme géométrique des axes des couples composants.* — Établissons d'abord le théorème pour deux couples.

Deux couples quelconques. — Soient deux couples dont les axes sont les vecteurs H et K. Prenons d'abord le cas général où ces axes ne sont pas parallèles (*fig.* 64, I). Les plans des deux couples se coupent alors suivant une droite. Soient AA_1 deux points pris sur cette droite. Nous pouvons modifier chacun des couples dans son plan, de façon à ramener le premier à deux forces P et P_1 appliquées en A et A_1 perpendiculairement à AA_1 et le deuxième à deux forces Q et Q_1 appliquées de même en A et A_1 perpendiculairement à AA_1. Les forces P et Q se composent en une force R, les forces P_1 et Q_1 égales et opposées en une force R_1 égale et opposée à R. L'ensemble des deux couples est donc remplacé par un couple unique R, R_1. Si l'on applique les axes des trois couples au point A_1, les axes A_1H et A_1K sont les moments linéaires de P et Q par rapport au point A_1, l'axe A_1G du couple résultant est le moment de R par rapport au même point. Mais, comme R est la résultante de P et Q, son moment A_1G est la somme géométrique des moments A_1H et A_1K ; ce qui démontre le théorème.

Fig. 64.



Cas particulier où les axes des couples composants ont même direction. — Dans ce cas, les plans des deux couples sont parallèles ; mais, en transportant l'un des couples, on peut amener les deux couples à être dans le même plan. Dans ce plan on prend deux points AA_1 et l'on amène chaque couple à deux forces appliquées en A et A_1 perpendiculairement à AA_1, le premier aux deux forces P et P_1, le deuxième aux deux forces Q et Q_1. Si les axes A_1H et A_1K des deux couples composants ont même sens (*fig.* 64, II), les forces P et Q, P_1 et Q_1 s'ajoutent, et l'on obtient un couple $R = P + Q$, $R_1 = P_1 + Q_1$, dont l'axe A_1G est la somme des deux axes A_1H et A_1K. Dans ce cas l'angle HA_1K du cas général est nul.

Si les axes des couples composants sont de sens contraires, avec $A_1H > A_1K$ (*fig.* 64, III), les forces P et Q d'une part, P_1 et Q_1 de l'autre ont pour résultantes $R = P - Q$, $R_1 = P_1 - Q_1$ et l'on obtient un couple dont l'axe A_1G est dirigé dans le sens A_1H et égal à $A_1H - A_1K$; A_1G est encore la somme géométrique de A_1H et A_1K, mais actuellement l'angle HA_1K est égal à deux angles droits.

Si les axes H et K des couples composants sont égaux et de sens contraires, les forces P et Q, P_1 et Q_1, appliquées aux points A et A_1, se détruisent; le couple résultant a ses forces R et R_1 nulles; son axe est nul; il est encore la somme géométrique des axes composants.

Composition de *n* couples. — Soient *n* couples

d'axes G_1, G_2, . . . , G_n. On peut remplacer les deux premiers couples par un couple résultant dont l'axe H est la somme géométrique de G_1 et G_2, puis les couples H et G_3 par un couple K dont l'axe est la somme géométrique de H et G_3 c'est-à-dire de G_1, G_2, G_3 ; on continuera ainsi et l'on obtiendra finalement un couple dont l'axe G est la somme géométrique de G_1, G_2, . . . , G_n.

L'axe G du couple résultant est, d'après la théorie générale des moments linéaires, égal, en grandeur, direction et sens, au moment linéaire résultant de toutes les forces constituant les couples par rapport à un point quelconque de l'espace.

Si l'axe G du couple résultant est *nul*, ce couple lui-même est nul, et l'ensemble des couples donnés se réduit à *rien*, à l'aide des opérations élémentaires.

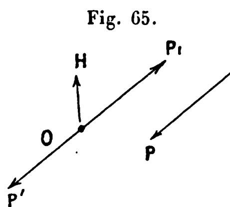
§ IV. — RÉDUCTION DES FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE, A UNE FORCE ET A UN COUPLE.

66. **Théorème fondamental.** — *On peut, sans changer l'état d'un corps solide, remplacer une force* P, *appliquée au corps, par une force égale, parallèle et de même sens,* P', *appliquée en un point quelconque* O *du corps et par un couple dont l'axe est le moment linéaire de* P *par rapport au point* O.

En effet, le corps étant sollicité par la force P, prenons un point quelconque O du corps et appliquons à

ce point une force P′ égale et parallèle à P et de même sens que P et une force P_1 égale et opposée (fig. 65); l'état du corps n'est pas changé. Les deux forces P et P_1 forment un couple dont l'axe OH est le moment linéaire de P par rapport à O. Nous voyons donc que la force P se trouve remplacée par la force P′ et le couple PP_1 d'axe OH, perpendiculaire à P′. Le théorème est ainsi démontré.

Fig. 65.



Réciproquement, l'ensemble d'une force P′ *et d'un couple dont l'axe* OH *est perpendiculaire à* P′ *se réduit à une force unique* P *égale et parallèle à* P′, *de même sens que* P′.

En effet, le plan du couple d'axe OH contient la force OP′: nous pouvons, sans modifier l'axe de ce couple, changer ses forces et son bras de levier de telle façon que ses forces aient même intensité que P′. Nous pouvons ensuite faire tourner ce couple dans son plan, de façon à donner à une de ses forces la position P_1 égale et directement opposée à P′; l'autre prenant une position P. Les forces P′ et P_1 se détruisent et il reste la seule force P, égale et parallèle à P′, de même sens que P′, ayant OH pour moment linéaire par rapport à O.

67. **Réduction des forces.** — *Des forces en nombre quelconque, appliquées à un corps solide, peuvent toujours être ramenées à une force unique, égale à leur somme géométrique, appliquée en un point* O, *arbitrai-*

rement choisi, et à un couple dont l'axe est leur moment résultant par rapport au point O.

Soient F_1, F_2, ..., F_n des forces appliquées à un solide. Choisissons un point arbitraire O du corps. Nous pouvons remplacer F_1 par une force OF'_1, égale, parallèle et de même sens, appliquée en O, et par un couple dont l'axe OG_1 est le moment linéaire de F_1 par rapport à O ; nous pouvons de même remplacer les forces F_2, ..., F_n par des forces F'_2, ..., F'_n égales, parallèles et de même sens appliquées en O et par des couples dont les axes OG_2, ..., OG_n sont les moments linéaires de F_2, ..., F_n par rapport à O.

Les forces concourantes F'_1, F'_2, ..., F'_n se composent en une R égale à la somme géométrique des forces données. Les couples d'axes OG_1, OG_2, ..., OG_n se composent en un seul dont l'axe OG, égal à la somme géométrique de OG_1, OG_2, ..., OG_n, est le moment résultant des forces F_1, F_2, ..., F_n par rapport au point O.

Le théorème est donc démontré.

Comme le choix du point O est arbitraire, il y a une infinité de manières de réduire ainsi les forces F_1, F_2, ..., F_n à une force et à un couple.

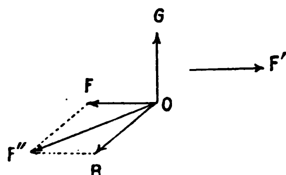
A chaque position de O correspond une réduction par la méthode précédente. Quand le point O varie, la force OR reste la même en grandeur, direction et sens, mais l'axe OG du couple change en général.

68. **Réduction des forces à deux.** — *On peut*

toujours réduire des forces appliquées à un solide à deux forces, dont l'une passe par un point pris à volonté.

Soit O un point pris à volonté; nous pouvons réduire les forces à une force OR appliquée à O et à un couple d'axe OG. Le couple est constitué par deux forces F et F′, égales et opposées, situées dans un plan perpendiculaire à OG (*fig.* 66). Transportons ce couple parallèlement à lui-même de façon que la force F vienne s'appliquer au point O, l'autre prenant une position F′. Les forces concourantes OR et OF se composent en une force F″ et le système de forces considéré est réduit à deux forces F′ et F″, dont l'une F″ passe par le point O, arbitrairement choisi.

Fig. 66.



Il faut remarquer que, le point O étant choisi, les forces F′ et F″ ne sont pas entièrement déterminées et qu'il y a une infinité de façons de réduire le système à deux forces dont l'une passe par O. En effet, tout en laissant la force F appliquée en O, on peut faire tourner le couple FF′ dans le plan perpendiculaire à OG en O et, en même temps, modifier ses forces et son bras de levier, pourvu que son axe OG ne change pas. Ces changements feront varier à la fois F′ et F″.

§ V. — CONDITIONS GÉNÉRALES D'ÉQUILIBRE D'UN SOLIDE LIBRE

69. **Équilibre.** — *Les forces appliquées à un solide étant réduites à une force* OR *et à un couple d'axe* OG, *pour que le corps soit en équilibre, il faut et il suffit que la force et le couple soient nuls.*

En effet, soient, comme dans le numéro précédent, F et F′ les deux forces du couple, F étant appliquée au point O. Les forces se réduisent alors à deux, la force F′ du couple et la force F″ résultante de F et R *appliquée en* O. Pour que le corps soit en équilibre il faut que ces deux forces finales F′ et F″ se fassent équilibre, c'est-à-dire qu'elles soient égales et directement opposées (n° 51). Or, quand deux forces sont égales et directement opposées, la ligne d'action de l'une passe par le point d'application de l'autre : la ligne d'action de F′ doit donc passer par O, et le moment du couple F F′ est *nul*, puisque F est appliqué à O. Donc déjà OG est *nul*. Le couple étant nul, les forces se réduisent à la seule force OR qui doit être nulle aussi pour que le corps soit en équilibre.

Les conditions énoncées sont donc *nécessaires*. Elles sont évidemment *suffisantes*, car, si OR et OG sont nuls, les forces peuvent, par les opérations élémentaires, être réduites à rien.

On peut dire aussi : *pour l'équilibre il faut et il suffit que la somme géométrique* OR *des forces et leur moment résultant* OG, *relatifs à un point* O, *soient nuls.*

Remarque. — D'après cela, si la somme géométrique et le moment résultant d'un système sont nuls par rapport à un point déterminé de l'espace, le système est en équilibre et les mêmes éléments sont nuls par rapport à tous les points de l'espace.

70. **Un couple n'a pas de résultante.** — En effet, si un couple d'axe G, différent de zéro, pouvait être remplacé par une force unique OR, ce même couple serait tenu en équilibre par une force OR_1, égale et directement opposée à OR. Mais, d'après les conditions générales d'équilibre, cela est impossible si l'axe du couple G n'est pas *nul.*

71. **La réduction d'un système de forces données à une force appliquée en un point O et à un couple n'est possible que d'une manière.** — En effet, supposons que, par des procédés différents, on ait réduit un système de forces S d'abord à une force OR et à un couple d'axe OG, puis à une force OR′ et à un couple d'axe OG′. Nous allons montrer que l'on a, en grandeur, direction et sens,

$$OR' = OR, \qquad OG' = OG.$$

Le système S pouvant être remplacé par la force

OR et le couple d'axe OG sera tenu en équilibre par la force —(OR), égale et opposée à OR, et le couple d'axe —(OG), égal et opposé à OG. Comme, d'autre part, le système peut être remplacé par la force OR′ et le couple OG′, l'ensemble formé par les deux forces OR′ et —(OR) et les deux couples OG′ et —(OG) doit être en équilibre. Les forces (OR′) et —(OR) se composent en une résultante OR_1; les couples OG′ et —(OG) en un couple OG_1. Puisque l'équilibre a lieu, on a

$$OR_1 = 0, \quad OG_1 = 0.$$

Donc OR′ est égal et opposé à —(OR), c'est-à-dire égal à OR, en grandeur, direction et sens; et OG′ est égal et opposé à —(OG), c'est-à-dire égal à OG. Ce qui démontre le théorème.

72. **Conditions analytiques d'équilibre d'un solide libre.** — Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires; pour définir n forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ appliquées au solide, appelons (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2). $\ldots$, (X_n, Y_n, Z_n) les projections respectives de ces forces sur les trois axes et (L_1, M_1, N_1), (L_2, M_2, N_2), $\ldots$, (L_n, M_n, N_n) leurs moments respectifs par rapport aux trois axes.

Construisons la somme géométrique OR et le moment résultant OG de ces forces par rapport au point O et appelons X, Y, Z et L, M, N les projections respectives de ces deux vecteurs sur les trois axes. On

aura, d'après la définition même de ces deux vecteurs,

$$(\mathrm{OR})\quad \begin{cases} X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \\ Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n, \\ Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n; \end{cases}$$

$$(\mathrm{OG})\quad \begin{cases} L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n, \\ M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n, \\ N = N_1 + N_2 + \ldots + N_n. \end{cases}$$

Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que OR et OG soient nuls : donc il faut et il suffit que l'on ait les six équations

$$(\text{Équilibre})\quad \begin{cases} X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \\ L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0. \end{cases}$$

On peut énoncer ces six conditions, en disant : *pour que des forces appliquées à un solide se fassent équilibre, il faut et il suffit* (sous les restrictions indiquées au début) *que la somme de leurs projections sur chacun des trois axes de coordonnées soit nulle et que la somme de leurs moments par rapport à chacun de ces axes soit nulle.*

73. **Cas particulier : équilibre de forces concourantes.** — Dans ce cas, on peut transporter les forces au point de concours et les réduire à une. Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que la somme géométrique des forces soit nulle. Analytiquement, en prenant le point de concours pour origine, on voit que L, M, N sont nuls d'eux-mêmes, et il suffit d'écrire les trois conditions

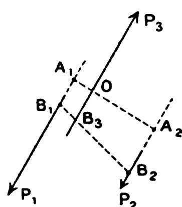
$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

74. Équilibre de trois forces appliquées à un solide : I. Équilibre de trois forces concourantes. — Supposons un solide sollicité par trois forces concourant en O. Nous pouvons toujours les transporter au point O. Pour qu'elles se fassent équilibre, il faut et il suffit qu'elles vérifient les conditions d'équilibre indiquées au n° 27.

II. **Équilibre de trois forces parallèles.** — Prenons maintenant *trois forces parallèles* et cherchons les conditions d'équilibre.

Sur les trois forces, deux auront le même sens que nous regarderons comme positif, la troisième le sens contraire. Nous regarderons les intensités P_1 et P_2 des deux premières comme positives (*fig.* 67) et l'intensité P_3 de la troisième comme négative. Pour l'équilibre il faut et il suffit que P_3 soit égale et directement opposée à la résultante de P_1 et P_2.

Fig. 67.



On en conclut que, pour que trois forces parallèles se fassent équilibre, il faut et il suffit.

1° Que la force P_3, qui est seule de son sens, soit égale en valeur absolue à la somme des deux autres :

2° Qu'elle soit entre ces deux forces dans leur plan ;

3° Que les segments dans lesquels la force P_3 coupe une transversale aux trois forces soient inversement proportionnels aux forces P_1 et P_2.

On retrouverait facilement ces conditions, en expri-

mant que la somme géométrique des forces est nulle et que le moment résultant par rapport à un point O de P_3 est nul.

III. **Équilibre de trois forces quelconques.** — Cherchons, enfin, les conditions d'équilibre de trois forces quelconques P, Q, R, appliquées à un corps solide.

Tout d'abord, *pour qu'il y ait équilibre, il faut que les trois forces soient dans un même plan.* En effet, prenons un point quelconque O sur la ligne d'action de R : il faut que la somme géométrique des moments linéaires des trois forces par rapport à O soit nulle. Le moment de R étant nul de lui-même, il faut que les moments linéaires de P et Q soient égaux et opposés. Comme ces moments sont perpendiculaires aux plans déterminés par O et chacune des forces P et Q, ces deux plans doivent coïncider. Les deux forces P et Q sont donc dans un plan contenant le point O *choisi arbitrairement* sur R : ce qui exige que les trois forces soient dans un même plan.

Supposons cette première condition remplie, deux cas peuvent se présenter :

Premier cas. — Deux des forces P et Q sont concourantes ; on peut alors les composer en une seule R′ ; pour qu'il y ait équilibre il faut et il suffit que la troisième force R soit égale et directement opposée à R′. Donc, si deux des forces concourent, il faut et il suffit, pour l'équilibre, que les trois soient concourantes

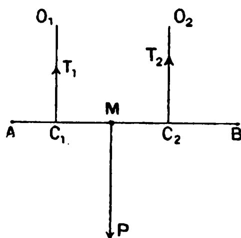
et remplissent les conditions d'équilibre de trois forces concourantes que nous venons d'indiquer.

Deuxième cas. — Les trois forces P, Q, R sont parallèles; elles devront alors remplir les conditions d'équilibre de trois forces parallèles, telles qu'elles viennent d'être données.

En résumé, *pour que trois forces se fassent équilibre sur un solide, il faut qu'elles soient dans un même plan, que, dans ce plan, elles soient concourantes ou parallèles et remplissent,* par suite, *les conditions d'équilibre de trois forces concourantes ou parallèles.*

75. **Exemples de solides soumis à trois forces.** — I. On considère, dans un plan vertical, une tige homogène pesante AB pesant 1^{kg}, suspendue par deux fils verticaux O_1C_1, O_2C_2 dont les points d'attache C_1 et C_2 avec la barre sont à la même hauteur (*fig.* 68). Calculer les tensions des deux fils, sachant que le milieu M de la barre est entre C_1 et C_2 à 14^{cm} de C_1 et à 11^{cm} de C_2.

Fig. 68.



Les forces appliquées à la barre sont : 1° les deux tensions T_1 et T_2 des deux fils tirant vers le haut; 2° son poids $P = 1^{kg}$ tirant vers le bas et appliqué en M. On a donc

$$T_1 + T_2 - 1 = 0,$$

$$\frac{T_1}{11} = \frac{T_2}{14} = \frac{1}{25}.$$

Donc, en kilogrammes,

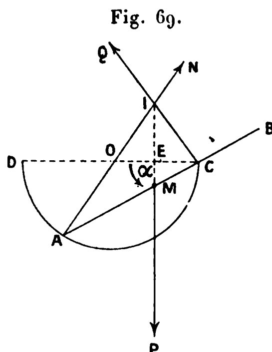
$$T_1 = \frac{11}{25} = 0,44,$$

$$T_2 = \frac{14}{25} = 0,56.$$

II. Étant donnée une coupe ayant la forme d'une demi-sphère dont le grand cercle limite est horizontal, on place dans cette coupe une tige homogène pesante AB dont une extrémité A peut glisser sans frottement sur le fond, tandis que la tige s'appuie contre le bord de la coupe sur lequel elle peut glisser sans frottement. Trouver les positions d'équilibre.

La tige est soumise à trois forces (*fig.* 69): 1° le poids P appliqué en son milieu M; 2° la réaction normale N de la surface sphérique sur l'extrémité A; 3° la réaction Q du bord sur la tige; cette dernière force est appliquée au point C de la tige qui touche le bord; elle est normale à la tige, car celle-ci peut glisser sans frottement sur le bord.

Fig. 69.



Pour qu'il y ait équilibre, il faut que ces trois forces soient dans un même plan. Ce plan est nécessairement vertical, car il contient le poids P, et il passe par le centre O de l'hémisphère, car il contient la réaction N dirigée suivant le rayon AO. La position d'équilibre cherchée est donc dans un plan vertical

passant par O. Nous prendrons ce plan pour plan de la figure 69.

Appelons α l'angle DCA de la tige avec le diamètre horizontal CD, $2l$ la longueur AB de la tige, R le rayon de la coupe. Les trois forces P, N, Q doivent être concourantes.

Soit I le point de rencontre de Q et N : en exprimant que la projection de CI sur CD est égale à celle de CM, on a, pour déterminer $x = \cos\alpha$, l'équation

$$4Rx^2 - lx - 2R = 0.$$

Discussion. — Pour qu'une racine x convienne, il faut : 1° qu'elle soit réelle ; 2° qu'elle soit positive ; 3° qu'elle soit moindre que 1, car x est le cosinus d'un angle aigu.

Une fois x trouvé, on connaît α, et il faut placer la barre de façon que l'angle ACD $= \alpha$. Mais, pour cela, il faut que AC $<$ AB, c'est-à-dire

$$2R\cos\alpha < 2l, \quad \cos\alpha < \frac{l}{R}, \quad x < \frac{l}{R}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que

$$2R > l > \frac{R\sqrt{6}}{3}.$$

Il y a alors une solution.

76. **Autre cas particulier ; équilibre de forces situées dans un même plan.** — Soit un corps solide sollicité par des forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ situées dans un plan fixe que nous prenons pour plan des xy. Dans ce

cas, la somme géométrique des forces OR est évidemment dans ce plan, et leur moment résultant OG est normal au plan.

Au point de vue analytique, en employant les mêmes notations que dans le cas général, on voit que les projections Z_1, Z_2, ..., Z_n des composantes sur Oz sont toutes nulles ; de même les moments L_1, L_2, ..., L_n, M_1, M_2, ..., M_n des composantes par rapport aux axes Ox et Oy sont nuls, puisque toutes les forces sont dans un même plan avec chacun de ces axes. Les quantités Z, L, M sont donc nulles d'elles-mêmes.

Sur les six conditions du cas général on voit que trois sont remplies d'elles-mêmes ; et il restera à écrire les trois conditions

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0,$$
$$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = 0,$$
$$N_1 + N_2 + \cdots + N_n = 0.$$

La somme des projections des forces sur chacun des axes Ox *et* Oy *situés dans le plan des forces doit être nulle ; et la somme de leurs moments par rapport à l'axe* Oz *perpendiculaire à ce plan doit être nulle.*

77. **Dernier cas particulier : forces parallèles.** — Prenons un axe Oz parallèle à la direction commune des forces et deux axes Ox et Oy formant avec Oz un trièdre trirectangle. Appelons P_1, P_2, ..., P_n les valeurs algébriques des forces parallèles estimées positivement dans le sens Oz.

Les projections des forces sur Ox et Oy étant nulles, les quantités X et Y sont nulles d'elles-mêmes.

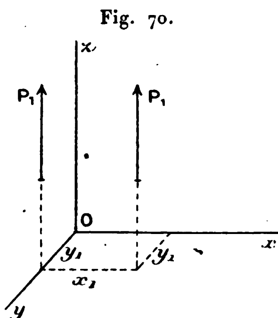
Les forces étant toutes parallèles à Oz leurs moments $N_1, N_2, \ldots, N_n$ par rapport à Oz sont nuls et la quantité N *est nulle d'elle-même. Il reste donc à exprimer que la somme des projections des forces sur* Oz *est nulle*

$$(1) \qquad P_1 + P_2 + \cdots + P_n = 0$$

et que la somme des moments des forces par rapport à chacun des axes Ox *et* Oy *est nulle.*

Moments par rapport à Ox. — Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point d'application de la force P_1 : calculons le moment de P_1 par rapport à Ox. Pour cela il faut projeter P_1 sur le plan yOz perpendiculaire à Ox (*fig.* 70), ce qui donne une force identique à P_1, et multiplier cette projection par sa distance au point O qui est $\pm y_1$. Le moment de P_1 est donc $\pm P_1 y_1$; mais, d'après les conventions faites sur le signe d'un moment, ce moment est

Fig. 70.



$$P_1 y_1$$

en grandeur et *signe*.

C'est ce qu'il suffit de vérifier dans les différents cas

de figure. Ainsi, quand P_1 et y_1 sont positifs, un mobile suivant la force P_1, de l'origine vers l'extrémité, tourne, autour de Ox, dans le sens positif, le moment de P_1 est positif et $P_1 y_1$ est positif. Il en est de même si P_1 et y_1 sont négatifs. Si, au contraire, un seul des facteurs P_1 ou y_1 est négatif, on voit géométriquement que le moment de P_1 est négatif, et $P_1 y_1$ est négatif.

La règle est ainsi démontrée : le moment L_1 de P_1 par rapport à Ox est $P_1 y_1$: de même

$$L_2 = P_2 y_2, \quad \ldots, \quad L_n = P_n y_n.$$

En prenant les moments des mêmes forces par rapport à Oy on voit, par un raisonnement analogue, que ces moments sont

$$M_1 = -P_1 x_1, \quad M_2 = -P_2 x_2, \quad \ldots, \quad M_n = -P_n x_n.$$

Les deux dernières conditions d'équilibre sont donc

$$(2) \qquad \begin{cases} P_1 x_1 + P_2 x_2 + \cdots + P_n x_n = 0, \\ P_1 y_1 + P_2 y_2 + \cdots + P_n y_n = 0. \end{cases}$$

Les trois équations (1) et (2) sont les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre d'un système de forces parallèles à Oz.

78. **Exemple.** — Imaginons une table circulaire, avec trois pieds verticaux A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 (*fig.* 71) reposant sur un parquet horizontal ; on suppose que les extrémités des pieds forment un triangle équilatéral et que le centre de la table coïncide avec le point de rencontre C des

médianes du triangle $B_1B_2B_3$. On connaît la longueur m de la médiane B_1E,

$$m = 50^{cm},$$

le poids

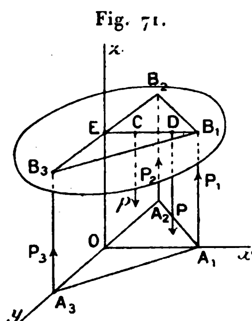
$$p = 3^{kg}$$

de la table, appliqué en C ; on place sur la table un poids sphérique homogène

$$P = 10^{kg}$$

dans une position telle que la verticale du centre de ce poids rencontre la médiane B_1E en un point D placé à une distance $ED = x$ du point E. Calculer les réactions du sol sur les trois pieds.

Fig. 71.



Prenons comme origine O le milieu du côté A_2A_3, comme axe Oz la verticale ascendante OE ; comme axe Ox la médiane OA_1, enfin comme axe Oy le côté A_2A_3. Appelons P_1, P_2, P_3 les valeurs absolues des réactions verticales du sol sur les trois pieds A_1, A_2, A_3. Si nous convenons de regarder comme positives les forces tirant vers le haut et comme négatives les forces tirant vers le bas, on voit que la table est sollicitée par cinq forces parallèles

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad -p, \quad -P.$$

En écrivant que la somme algébrique de ces forces est nulle, on a

$$(3) \qquad P_1 + P_2 + P_3 - p - P = 0.$$

En écrivant que la somme des moments par rapport à Ox est nulle, on a

$$(4)\qquad aP_3 - aP_2 = 0,$$

où a désigne la moitié du côté A_2A_3 : en effet, les trois forces autres que P_2 et P_3 rencontrent Ox et ont leurs moments nuls. En écrivant de même que la somme des moments des forces par rapport à Oy est nulle, on a, puisque EC est le tiers de la médiane,

$$(5)\qquad \frac{m}{3}p + xP - mP_1 = 0,$$

car les moments des forces P_2 et P_3 sont nuls par rapport à Oy.

En résolvant le système des trois équations (3), (4) et (5) par rapport à P_1, P_2, P_3, on a

$$P_1 = \frac{1}{3}p + \frac{x}{m}P,$$

$$P_2 = P_3 = \frac{1}{3}p + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{m}\right)P.$$

Si l'on prend, pour p, P, m, les valeurs numériques données plus haut, on a, *en kilogrammes*,

$$(6)\qquad \begin{cases} P_1 = 1 + \dfrac{x}{5}, \\ P_2 = P_3 = 6 - \dfrac{x}{10}. \end{cases}$$

Discussion. — Ces formules donnent pour P_1, P_2, P_3 des valeurs positives tant que le poids additionnel P de 10^{kg} rencontre la table en un point D placé entre E et B_1. Supposons qu'on fasse glisser le poids pour l'amener au delà de B_1, tout en le laissant sur le prolongement de la médiane

EB_1. Alors x est plus grand que 50^{cm} ; P_2 et P_3 restent positifs tant que

$$x < 60\,;$$

pour $x = 60^{cm}$, P_2 et P_3 s'annulent. Si

$$x > 60,$$

P_2 et P_3 deviennent *négatifs*. Cela signifie que, pour maintenir alors l'équilibre, il faudrait que le parquet retienne les pieds A_2 et A_3 de façon à les tirer vers le bas et à les empêcher de se soulever. Mais, comme le parquet ne peut exercer aucune action de ce genre, les pieds A_2 et A_3 se soulèvent et la table bascule.

On trouverait un résultat analogue en déplaçant le poids additionnel P le long de la médiane au delà de E dans le sens B_1E. Alors x deviendrait négatif. La force P_1 resterait positive tant que $x > -5^{cm}$; pour

$$x = -5$$

elle serait nulle, et enfin pour

$$x < -5$$

elle serait négative. Dans cette dernière hypothèse l'équilibre serait impossible et la table basculerait autour de A_2A_3, le pied A_1 quittant le sol.

§ VI. — ÉQUIVALENCE DE DEUX SYSTÈMES DE FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE CAS PARTICULIERS DE LA RÉDUCTION

79. Conditions d'équivalence de deux systèmes de forces appliquées à un corps solide.

— Imaginons deux systèmes de forces S et S′ appli-

quées successivement à un même corps solide; le premier S étant formé de n forces F_1, F_2, ..., F_n, le deuxième S' de n' forces F'_1, F'_2, ..., $F'_{n'}$.

On dit que *les deux systèmes sont équivalents quand on peut les remplacer l'un par l'autre sans changer l'état du corps solide.*

Après avoir choisi un point O, on pourra réduire le premier système à une force OR appliquée en O et à un couple d'axe OG; on pourra de même réduire le second à une force OR' et à un couple OG'.

On a alors le théorème suivant:

Pour que les deux systèmes de forces S *et* S' *soient équivalents, il faut et il suffit que l'on ait, en grandeur, direction et sens,*

$$OR' = OR, \qquad OG' = OG,$$

c'est-à-dire que les deux systèmes aient même somme géométrique et même moment résultant par rapport à un point O.

1° *La condition est nécessaire.* — En effet, si les deux systèmes sont équivalents, la force OR' et le couple OG' doivent être tenus en équilibre par une force —(OR) égale et opposée à OR et par un couple d'axe —(OG) égal et opposé à OG. Alors, comme au n° 71, la résultante de OR' et de — (OR) et le couple résultant des couples d'axes OG' et — (OG) doivent être *nuls*. Donc OR' est égal et opposé à —(OR), c'est-à-dire identique à OR; OG' est égal et opposé à — (OG), c'est-à-dire identique à OG.

2° *La condition est suffisante,* car, si elle est remplie, les deux systèmes peuvent être réduits à la même force OR et au même couple OG.

80. **Cas particuliers de la réduction.** — Cherchons, en particulier, quelles sont les conditions pour qu'un système de forces S soit équivalent à un couple unique ou à une force unique.

1° *Pour qu'un système soit équivalent à un couple unique, il faut et il suffit que la somme géométrique des forces soit nulle.*

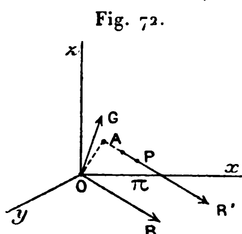
Cette condition est nécessaire, car dans un couple la somme géométrique des deux forces est nulle; elle est évidemment suffisante, car, OR étant nul, les forces se réduisent à un couple d'axe OG.

2° *Pour qu'un système de forces soit équivalent à une force unique, il faut et il suffit que la somme géométrique des forces ne soit pas nulle et que le moment résultant soit perpendiculaire à la direction de cette somme.*

La condition est nécessaire : en effet, soit un système de forces S équivalent à une force unique R′. Le système S a même somme géométrique et même moment résultant que la seule force R′. Donc, la somme géométrique OR de ce système est égale et parallèle à R′, et le moment résultant OG de ce système est identique au moment linéaire de R′; mais ce moment linéaire OG est perpendiculaire à R′, c'est-à-dire à sa parallèle OR.

La condition est suffisante. Soit un système dans lequel le moment résultant OG est perpendiculaire à la somme géométrique OR : il faut montrer que ce système est équivalent à une force unique, parallèle à OR. En effet, le système se réduit alors à une force OR et à un couple dont l'axe OG est perpendiculaire à OR. Or cet ensemble se réduit à une force unique R′ parallèle à OR située dans le plan mené par O perpendiculairement à OG (n° 66).

Fig. 72.



81. **Résumé.** — Soit un système de forces tel qu'en faisant la réduction en un point O on trouve une force R appliquée en O et un couple d'axe G ; appelons (R, G) l'angle de ces deux vecteurs. On peut résumer la discussion dans le tableau suivant :

$RG\cos(R, G) \gtrless 0$,		Système équivalent à deux forces non situées dans un même plan ; équivalent aussi à une force et à un couple.
$RG\cos(R, G) = 0$.	1° $R \neq 0$.	Système équivalent à une force unique.
	2° $R = 0$, $G \neq 0$.	Système équivalent à un couple unique.
	3° $R = 0$, $G = 0$.	Système équivalent à zéro. Équilibre.

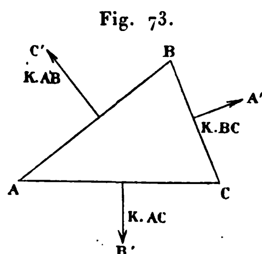
82. **Application : Forces dans un plan.** — Considérons des forces situées toutes dans un même plan xOy ; leur somme géométrique OR est évidemment dans ce plan et leur moment résultant OG normal au plan. Donc, si OR n'est pas nul, les forces sont équivalentes à une force unique située dans le plan. Cette force unique est égale et parallèle à R : on déterminera sa position en écrivant que son moment par rapport à O est OG.

Si OR $=$ o, les forces sont équivalentes à un couple situé dans le plan.

Si OR $=$ o, OG $=$ o, elles se font équilibre.

Exemples. — 1° Prenons dans le plan des xy un polygone quelconque et appliquons au milieu de chacun de ses côtés et perpendiculairement à sa direction une force proportionnelle à sa longueur et dirigée vers l'extérieur du polygone ; ces forces se font équilibre. Nous allons établir géométriquement cette proposition. Démontrons-la tout d'abord pour un triangle ABC.

Fig. 73.

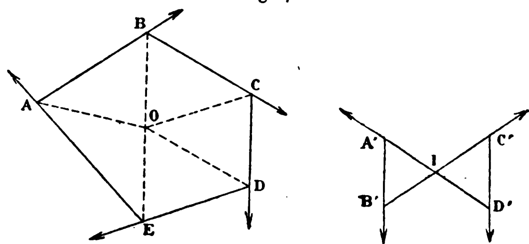


Les trois forces A'(K.BC), B'(K.AC), C'(K.AB) sont concourantes comme étant perpendiculaires aux milieux des côtés du triangle ; de plus, chacune de ces forces est à l'extérieur de l'angle des deux autres et proportionnelle au sinus de cet angle ; ces trois forces se font donc équilibre (*fig.* 73).

Passons maintenant au cas d'un polygone quelconque.

A l'aide de diagonales issues d'un sommet, partageons-le en triangles. Perpendiculairement aux côtés de chacun des triangles ainsi déterminés et en leurs milieux appliquons une série de forces proportionnelles à ces côtés et dirigées vers l'extérieur du triangle correspondant. D'après ce qui vient d'être dit, ce système de forces est en équilibre : or, au milieu de chaque diagonale sont appliquées deux forces égales et opposées ; on peut donc les supprimer sans troubler l'équilibre, et le polygone reste en équilibre sous l'ac-

Fig. 74.



tion des forces appliquées normalement à ses côtés ; la proposition est donc démontrée.

2° Soit donné un polygone plan ABCDE (*fig.* 74) sur lequel nous choisissons un sens de circulation ; appliquons à chaque sommet de ce polygone une force dirigée dans le sens du côté qui y aboutit et proportionnelle à sa longueur. Si le polygone est convexe, ces forces se réduisent à un couple. En effet, la somme des projections de ces forces sur un axe quelconque est nulle, comme égale à K fois la projection du contour fermé ABCDEA. De plus, la somme des moments par rapport à un point quelconque O du plan du polygone n'est pas nulle ; en effet, c'est

$$N = \pm 2K(\text{surf. } OAB + \text{surf. } OBC + \ldots),$$

c'est-à-dire

$$N = \pm 2K(\text{surf. ABCDE}).$$

Il ne peut donc pas y avoir équilibre.

Si le polygone est concave, il n'en est plus de même : prenons, en effet, le polygone A'B'C'D' ; la somme des moments par rapport à un point O du plan sera, en ayant égard à leurs signes,

$$N = \pm 2K(\text{surf. D'IC'} - \text{surf. B'IA'});$$

il y aura donc équilibre si les deux triangles D'IC', B'IA' sont équivalents.

83. **Forces parallèles.** — Imaginons un corps solide sollicité par des forces parallèles. Si l'on appelle $P_1, P_2, \ldots, P_n$ les valeurs algébriques des forces parallèles, ces forces ont une somme géométrique OR qui leur est parallèle et dont la valeur algébrique P est donnée par

$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n = \Sigma P_k.$$

Le moment résultant OG des forces par rapport au point O est perpendiculaire à la direction commune de ces forces, car le moment linéaire de chaque force est perpendiculaire à cette direction. Donc OG est actuellement perpendiculaire sur OR. On a par suite les conclusions suivantes :

1° Si $P \neq 0$, les forces admettent une résultante égale à P appliquée au centre des forces parallèles, comme nous l'avons vu directement.

2° Si $P = o$, avec $OG \neq o$, les forces se réduisent à un couple d'axe OG. Les forces tirant dans un sens ont une résultante P' appliquée en C' (n° 58) ; les forces tirant en sens contraire une résultante $P'' = -P'$ égale et opposée appliquée en un point C'' : on a ainsi un couple.

3° Si $P = o$, $OG = o$, il y a équilibre : la droite $C'C''$ est parallèle à la direction commune des forces et les deux forces P' et $P'' = -P'$ sont égales et *directement* opposées.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE III

1. Une plaque matérielle infiniment mince ayant la forme d'un triangle équilatéral est placée dans l'intérieur d'une sphère fixe parfaitement polie, de telle façon que ses trois sommets A, B, C puissent glisser sans frottement sur la surface de la sphère.

Trouver les positions d'*équilibre*.

Réponse. — La plaque est sollicitée par quatre forces, le poids P appliqué au point de concours des médianes du triangle, les trois réactions normales appliquées aux trois sommets. Ces trois forces étant concourantes au centre O de la sphère, le poids P doit également passer par le centre. Dans la position d'équilibre la plaque est horizontale.

2. Même question en prenant une plaque homogène ayant la forme d'un polygone régulier quelconque.

3. On considère, dans un plan vertical, une droite verticale fixe Ox et une plaque ayant la forme d'un triangle équilatéral homogène d'épaisseur négligeable ABC. Cette plaque est attachée au point fixe O par un fil OM fixé au milieu M du côté AB, et son sommet A glisse sans frottement sur Ox.

Trouver les positions d'équilibre du triangle, en négligeant le poids du fil OM.

Réponse. — Le triangle est soumis à trois forces :

1° Le poids P appliqué au point de concours des médianes;

2° La tension T du fil dirigée suivant MO ;

3° La réaction normale N de la droite Ox appliquée au sommet A.

Ces trois forces doivent être concourantes dans l'équilibre.

Il peut exister deux espèces de positions d'équilibre : dans l'une le côté AB est normal à Ox ; dans l'autre il est oblique sur Ox. Quand il existe une position d'équilibre de la seconde espèce, l'angle correspondant θ du fil avec Ox est donné par

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

On peut trouver les positions d'équilibre en cherchant pour quelles positions du triangle le centre de gravité du triangle est à une hauteur maximum ou minimum.

4. On considère un parallélogramme rigide ABCD et l'on applique à ce parallélogramme quatre forces représentées en grandeur et sens par les quatre côtés AB, CD, AD, CB.

Montrer que ces quatre forces se font équilibre.

5. Trouver le centre de gravité d'une couche homogène comprise entre une sphère de centre O et une sphère intérieure de centre O'.

Soient V et V' les volumes des deux sphères; le poids de la couche peut être considéré comme la différence des poids des deux sphères. Il suffira donc d'appliquer aux points O et O' des forces parallèles P et P', l'une descendante, l'autre ascendante, choisies de telle façon que

$$\frac{P}{P'} = \frac{V}{V'}$$

et de déterminer le centre de ces deux forces parallèles.

6. Une barre homogène pesante AB est située dans un plan vertical fixe; elle peut glisser sans frottement sur un point fixe O

et son extrémité A glisse sans frottement sur une droite verticale fixe D du plan.

Trouver la position d'équilibre.

Réponse. — Les forces agissant sur la barre sont le poids P appliqué au milieu M de AB, la réaction Q du point O normale à la barre, la réaction N de la droite D appliquée en A normalement à D.

En appelant α l'angle de la barre avec D, $2l$ sa longueur et a la distance de O à D, on trouve que, dans l'équilibre,

$$\sin^3 \alpha = \frac{a}{l}.$$

On trouve la même équation en cherchant pour quelle valeur de α la hauteur du centre de gravité M est maximum ou minimum.

7. Même problème que le précédent, en supposant que la droite D soit horizontale au lieu d'être verticale.

8. Une barre homogène pesante AB située dans un plan vertical glisse sans frottement sur un point fixe O du plan, tandis que son extrémité A glisse sans frottement sur une courbe donnée C située dans le plan.

Quelle doit être cette courbe pour que la droite soit en équilibre dans toutes les positions qu'elle peut prendre ?

Réponse. — Il faut et il suffit que, dans toutes les positions que la droite peut prendre, son centre de gravité M (milieu de AB) reste à la même hauteur, c'est-à-dire décrive une droite horizontale D. La courbe C s'obtient alors en traçant une horizontale D, en joignant O à un point quelconque M de cette droite et en prenant sur OM une longueur MA égale à la demi-longueur de la droite.

Le lieu du point A est la courbe cherchée C; cette courbe s'appelle *conchoïde*.

Dans chacune des positions de la droite AB, la normale à la conchoïde en A, la perpendiculaire à la droite en O et la verticale du point milieu M sont concourantes, puisque la barre est toujours en équilibre.



9. Positions d'équilibre d'une barre homogène pesante AB dont une extrémité A est attachée à un point fixe O, par un fil AO inextensible et sans masse, et dont l'autre extrémité B glisse sans frottement sur un plan horizontal fixe situé au-dessous de O.

10. Si plusieurs forces appliquées à un corps solide se font équilibre ou se réduisent à un couple, le centre de gravité de masses égales placées aux extrémités de ces forces coïncide avec le centre de gravité de masses égales placées aux points d'application.

Réponse. — Ce théorème résulte de ce que la somme des projections des forces sur chacun des trois axes est nulle.

11. **Centre d'un système de forces situées dans un plan et admettant une résultante.** — Soit une figure plane $A_1A_2 \ldots A_n$, de forme invariable, aux différents points de laquelle sont appliquées des forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$, situées dans le plan de la figure et admettant une résultante R. Déplaçons la figure plane dans son plan, en supposant que les forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ restent appliquées aux mêmes points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de la figure mobile et conservent chacune une grandeur et une direction constantes.

Démontrer que la résultante R est également constante en grandeur et direction et passe par un point fixe C, invariablement lié à la figure mobile. Ce point est appelé par Möbius *centre des forces* $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

Réponse. — On démontrera d'abord le théorème pour deux forces, puis pour trois, ... et ainsi de suite.

12. Dans le second problème du n° 75, équilibre d'une barre pesante dans une coupe, vérifier que la valeur de α qui correspond à l'équilibre est la valeur de α pour laquelle la hauteur du centre de gravité M de la barre est maximum ou minimum.

Appelons z la distance EM du centre de gravité de la barre à l'horizontale CD : quand on fait varier l'angle α d'une façon quelconque, z varie en fonction de α. On trouve, quel que soit α,

$$z = CM \sin \alpha = (2 R \cos \alpha - l) \sin \alpha.$$

On trouvera les positions d'équilibre en cherchant les valeurs

et son extrémité A glisse sans frottement sur une droite verticale fixe D du plan.

Trouver la position d'équilibre.

Réponse. — Les forces agissant sur la barre sont le poids P appliqué au milieu M de AB, la réaction Q du point O normale à la barre, la réaction N de la droite D appliquée en A normalement à D.

En appelant α l'angle de la barre avec D, $2l$ sa longueur et a la distance de O à D, on trouve que, dans l'équilibre,

$$\sin^3 \alpha = \frac{a}{l}.$$

On trouve la même équation en cherchant pour quelle valeur de α la hauteur du centre de gravité M est maximum ou minimum.

7. Même problème que le précédent, en supposant que la droite D soit horizontale au lieu d'être verticale.

8. Une barre homogène pesante AB située dans un plan vertical glisse sans frottement sur un point fixe O du plan, tandis que son extrémité A glisse sans frottement sur une courbe donnée C située dans le plan.

Quelle doit être cette courbe pour que la droite soit en équilibre dans toutes les positions qu'elle peut prendre ?

Réponse. — Il faut et il suffit que, dans toutes les positions que la droite peut prendre, son centre de gravité M (milieu de AB) reste à la même hauteur, c'est-à-dire décrive une droite horizontale D. La courbe C s'obtient alors en traçant une horizontale D, en joignant O à un point quelconque M de cette droite et en prenant sur OM une longueur MA égale à la demi-longueur de la droite.

Le lieu du point A est la courbe cherchée C; cette courbe s'appelle *conchoïde*.

Dans chacune des positions de la droite AB, la normale à la conchoïde en A, la perpendiculaire à la droite en O et la verticale du point milieu M sont concourantes, puisque la barre est toujours en équilibre.

9. Positions d'équilibre d'une barre homogène pesante AB dont une extrémité A est attachée à un point fixe O, par un fil AO inextensible et sans masse, et dont l'autre extrémité B glisse sans frottement sur un plan horizontal fixe situé au-dessous de O.

10. Si plusieurs forces appliquées à un corps solide se font équilibre ou se réduisent à un couple, le centre de gravité de masses égales placées aux extrémités de ces forces coïncide avec le centre de gravité de masses égales placées aux points d'application.

Réponse. — Ce théorème résulte de ce que la somme des projections des forces sur chacun des trois axes est nulle.

11. **Centre d'un système de forces situées dans un plan et admettant une résultante.** — Soit une figure plane $A_1A_2 \ldots A_n$, de forme invariable, aux différents points de laquelle sont appliquées des forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$, situées dans le plan de la figure et admettant une résultante R. Déplaçons la figure plane dans son plan, en supposant que les forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ restent appliquées aux mêmes points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de la figure mobile et conservent chacune une grandeur et une direction constantes.

Démontrer que la résultante R est également constante en grandeur et direction et passe par un point fixe C, invariablement lié à la figure mobile. Ce point est appelé par Möbius *centre des forces* $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

Réponse. — On démontrera d'abord le théorème pour deux forces, puis pour trois, ... et ainsi de suite.

12. Dans le second problème du n° 75, équilibre d'une barre pesante dans une coupe, vérifier que la valeur de α qui correspond à l'équilibre est la valeur de α pour laquelle la hauteur du centre de gravité M de la barre est maximum ou minimum.

Appelons z la distance EM du centre de gravité de la barre à l'horizontale CD : quand on fait varier l'angle α d'une façon quelconque, z varie en fonction de α. On trouve, quel que soit α,

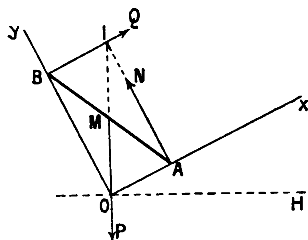
$$z = \text{CM} \sin \alpha = (2\,\text{R} \cos \alpha - l) \sin \alpha.$$

On trouvera les positions d'équilibre en cherchant les valeurs

de α rendant z maximum ou minimum. Il faut pour cela égaler à zéro la dérivée de z par rapport à α, ce qui donne précisément l'équation d'équilibre.

13. Soient deux plans rectangulaires se coupant suivant une droite horizontale ; une barre homogène pesante est placée de telle façon qu'une de ses extrémités A glisse sans frottement sur l'un des plans et l'autre B sur le second plan : on demande les positions d'équilibre de cette barre.

Fig. 75.



Réponse. — La barre doit être dans un plan perpendiculaire à l'intersection des deux plans : dans ce plan les normales aux deux plans en A et B et le poids MP de la barre doivent concourir. On vérifiera que, dans l'équilibre, la verticale du milieu M de la barre rencontre l'intersection des deux plans.

14. Soit un solide sollicité par des forces parallèles dont les unes $P_1, P_2, \ldots, P_m$ tirent dans un sens, les autres $P_{m+1}, \ldots, P_n$ en sens contraire (n° 57).

1° Calculer les coordonnées des centres des forces parallèles C' et C'' correspondant à ces deux groupes de forces.

2° En déduire les conditions d'équilibre du n° 77.

3° En déduire les conditions de l'équilibre astatique.

Réponse. — 1° Appelant comme dans le texte (n° 57) P' et P'' les sommes des deux groupes de forces on a pour les coordonnées x', y', z' de C'

$$x' = \frac{P_1 x_1 + \ldots + P_m x_m}{P'}, \ldots$$

et pour les coordonnées x'', y'', z'' de C''

$$x'' = \frac{P_{m+1} x_{m+1} + \ldots + P_n x_n}{P''}, \ldots$$

2° Pour qu'il y ait équilibre il faut d'abord $P' + P'' = 0$, $P'' = -P'$.

Alors, en retranchant x'' de x', on a

$$x'' - x' = \frac{P_1 x_1 + \ldots + P_n x_n}{P'},$$

de même

$$y'' - y' = \frac{P_1 y_1 + \ldots + P_n y_n}{P'}$$

$$z'' - z' = \frac{P_1 z_1 + \ldots + P_n z_n}{P'}.$$

En général les forces se réduisent alors à un couple P′, — P′ dont les deux forces sont appliquées aux points C′, C″.

Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que C′ C″ ait la direction commune des forces.

Supposons, comme au nº 77, les forces parallèles à Oz, il faut alors et il suffit, pour l'équilibre, $x'' = x'$, $y'' = y'$, c'est-à-dire

$$P_1 x_1 + \ldots + P_n x_n = 0, \qquad P_1 y_1 + \ldots + P_n y_n = 0.$$

Ce sont les conditions trouvées.

3º L'équilibre est astatique quand il a lieu quelle que soit la direction commune des forces. Pour cela il faut et il suffit que les points C′ et C′ coïncident, c'est-à-dire que les trois différences $x' - x''$, $y' - y''$, $z' - z''$ soient nulles.

Dans ce dernier cas les coordonnées du centre des forces parallèles définies par les formules (13) du nº 57 *sont indéterminées.*

CHAPITRE IV

ÉQUILIBRE DES CORPS SOLIDES NON LIBRES. MACHINES SIMPLES

§ I. — CONDITIONS D'ÉQUILIBRE

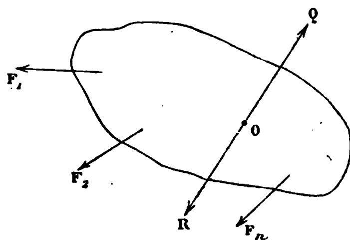
84. **Méthode.** — La méthode générale que nous emploierons consiste à regarder les corps comme libres, en introduisant comme inconnues auxiliaires les réactions provenant des liaisons qui leur sont imposées, réactions que l'on nomme *forces de liaison.*

85. **Corps solide ayant un point fixe.** — Imaginons un solide ayant un point O fixe, autour duquel il peut tourner librement. Désignons par $F_1, F_2, \ldots, F_n$ les forces qui agissent sur ce solide. Un tel corps est ce qu'on peut appeler *levier* dans le sens le plus général du mot. Nous cherchons donc les conditions d'équilibre d'un levier.

Le corps solide exerce sur le point fixe une pression R (*fig.* 76); en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, le point fixe exerce sur le corps une

réaction Q égale et directement opposée à R, de sorte que le corps solide peut être considéré comme libre sous l'action des forces F_1, F_2, ..., F_n, Q. Si le corps est en équilibre, c'est que les n premières forces ont une résultante unique, égale et directement opposée à Q; la condition d'équilibre est donc que *les forces données aient une résultante unique passant par le point fixe*. Cette condition est suffisante, car, si l'on remplace les forces appliquées au corps par cette résultante, celle-ci est détruite par la résistance du point fixe qui développe une réaction égale et directement opposée. Dans ce raisonnement, on admet que la résultante ne dépasse pas en grandeur la limite de la résistance du corps dont le point fixe fait partie.

Fig. 76.



86. **Corps solide ayant un axe fixe.** — Soient $F_1, F_2, \ldots, F_n$ les forces qui agissent sur un corps solide mobile autour d'un axe fixe Oz; celui-ci exercera sur les divers points de l'axe des pressions P', P'', P''', ..., et l'axe exercera à son tour des réactions Q', Q'', Q''', ... Le corps pourra être considéré comme libre, sous l'action des forces F_1, F_2, ..., F_n, Q', Q'', ... Pour qu'il y ait équilibre, il faut, en particulier, que

la somme des moments de toutes ces forces, par rapport à l'axe fixe, soit nulle. Et comme les moments des réactions Q', Q'', . . . sont nuls d'eux-mêmes, il faut que la somme N des moments des forces F_1, F_2,... F_n par rapport à Oz soit nulle.

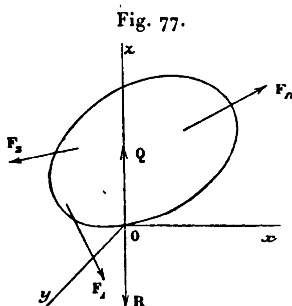
C'est une condition nécessaire de l'équilibre. Elle est suffisante; en effet, si elle est remplie, les forces se réduisent à une résultante OR, qui est détruite par la résistance de l'axe et à un couple dont l'axe OG est perpendiculaire à Oz, puisque N est nul. On peut faire tourner ce couple dans son plan, de façon que son bras de levier coïncide avec l'axe Oz; alors les forces $\varphi\varphi'$ qui le constituent, étant appliquées en des points de l'axe, sont détruites par sa résistance; le corps est donc bien en équilibre. Nous examinerons en détail, à propos du treuil, le cas où le corps est sollicité par deux forces.

En résumé, *pour qu'un solide mobile autour d'un axe fixe soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des moments des forces par rapport à cet axe soit nulle.*

87. **Corps solide s'appuyant sur un plan fixe poli : 1° Cas d'un seul point d'appui.** — Considérons d'abord le cas où le corps ne s'appuie que par un point sur le plan fixe; le plan exerce sur le corps une réaction normale, si nous supposons que le corps peut glisser sans frottement. Le corps peut être considéré comme libre, mais soumis aux forces F_1, F_2,..., F_n,

qui agissent directement sur lui, et à cette réaction Q. Pour que le corps soit en équilibre, il faut que les forces F aient une résultante unique égale et directement opposée à Q (*fig* 77), c'est-à-dire *que les forces données aient une résultante passant par le point d'appui, normale au plan et dirigée de façon à appliquer le corps sur le plan.*

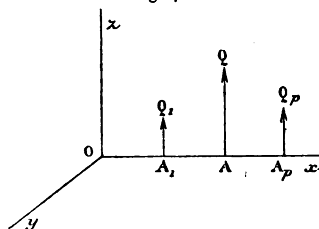
Fig. 77.



Ces conditions sont évidemment suffisantes, car, lorsqu'elles sont remplies, la résultante ne peut déterminer aucun glissement et est détruite par la fixité du plan qui développe une réaction égale et opposée à Q. Il serait aisé de retrouver analytiquement ces résultats.

2° **Cas de plusieurs points d'appui en ligne droite.** — Admettons que le corps s'appuie sur le plan fixe xOy par des points A_1, A_2, ... $A._p$ de la droite Ox. En tous ces points, le plan exerce des réactions normales Q_1, Q_2, ..., Q_p, toutes dirigées dans le même sens (*fig.* 78). Ces forces ont une résultante Q normale au plan, dirigée dans le même

Fig. 78.



sens, et dont le point d'application tombe sur Ox entre les points extrêmes A_1, A_p.

Pour que l'équilibre ait lieu, il faut que les forces données fassent équilibre à la résultante Q, *c'est-à-dire qu'elles aient une résultante unique, normale au plan, dirigée de façon à appliquer le corps sur le plan, et dont le prolongement rencontre Ox en un point situé entre les points d'appui extrêmes. Ces conditions nécessaires sont suffisantes,* car cette résultante peut alors être décomposée en deux forces, normales au plan et appliquées en deux points d'appui ; ces deux forces seront détruites par la résistance du plan.

3° **Cas général.** — Supposons que le corps solide repose sur le plan fixe par une série de points $A_1, A_2, \ldots, A_p$ non en ligne droite. L'exemple le plus simple serait une table reposant sur un parquet parfaitement poli par $3, 4, \ldots, p$ pieds. Le plan exerce des réactions normales $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$, qui ont une résultante unique Q, car elles sont toutes dirigées dans le même sens et, d'après ce que l'on a vu sur la composition des forces parallèles, le point où cette résultante perce le plan est situé à l'intérieur de tout polygone convexe qui renferme tous les points d'appui ; en particulier, il est à l'intérieur du polygone de *sustentation*, polygone convexe dont les sommets sont des points d'appui et qui renferme tous les autres points d'appui dans son intérieur ou sur son périmètre. *Pour qu'il y ait équilibre, il faut que les forces données fassent équilibre à la résultante*

Q; *il faut donc que les forces* F *aient une résultante unique normale au plan, qui soit dirigée de façon à appliquer le corps sur le plan et qui traverse le plan à l'intérieur du polygone de sustentation. Ces conditions sont suffisantes,* car, dans ces hypothèses, on pourra toujours décomposer cette résultante en trois forces normales au plan et appliquées à trois des points d'appui, forces qui seront détruites par la résistance du plan.

Cas d'un corps pesant placé sur un plan horizontal poli. — Le corps étant soumis à l'action de la seule pesanteur, les forces appliquées ont une résultante unique, le poids P appliqué au centre de gravité G du corps. Ce poids étant vertical est normal au plan et dirigé de façon à appliquer le corps contre le plan. Pour qu'il y ait équilibre, il restera donc une seule condition à remplir, c'est que la verticale GO du centre de gravité perce le plan horizontal en un point O intérieur au polygone convexe dont les sommets sont des points d'appui et qui contient tous les autres points d'appui dans son intérieur ou sur son périmètre. Les points d'appui peuvent même être en nombre infini, quand le corps touche le plan par une face plane, comme dans la figure 79.

Si le point O où la verticale de G perce le plan horizontal est extérieur au polygone d'appui défini plus haut, comme dans la figure 80, l'équilibre n'existe pas : le corps chavire. Pour l'empêcher de tomber, il suffirait de lui appliquer une seconde force verticale

auxiliaire P' choisie de telle façon que la résultante de P et P' perce le plan dans l'intérieur du polygone d'appui. On pourrait être tenté de dire qu'on empêche

Fig. 79.

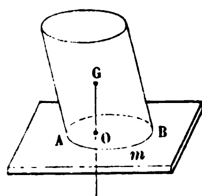
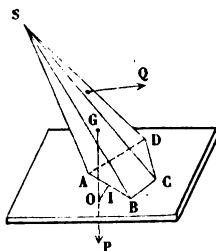


Fig. 80.



également le corps de chavirer en lui appliquant une force Q parallèle au plan (*fig*. 80); mais alors le corps *glisserait* sur le plan.

§ II. — MACHINES SIMPLES

88. **Définition.** — Dans ses *Éléments de statique*, Poinsot définit les machines *des instruments destinés à transmettre l'action des forces*.

Certaines machines servent à l'état statique comme les balances. D'autres servent à l'état dynamique comme le treuil, les poulies; pour ces dernières on peut dire qu'*elles transforment un travail en un autre*.

89. **Machines simples.** — Les machines dites

simples ont pour pièces essentielles un ou plusieurs corps solides qui sont assujettis à des liaisons, c'est-à-dire dont les mouvements sont gênés par des obstacles. Elles sont ordinairement soumises à l'action de deux forces : *la puissance* et *la résistance*.

Les machines simples, dans lesquelles entre un seul corps solide, se classent suivant la nature de la liaison imposée au corps, c'est-à-dire de l'obstacle qui s'oppose à son mouvement. Dans le *levier*, l'obstacle est un *point fixe ;* dans le *tour* ou *treuil*, il est un *axe fixe ;* dans le *plan incliné*, un *plan fixe*.

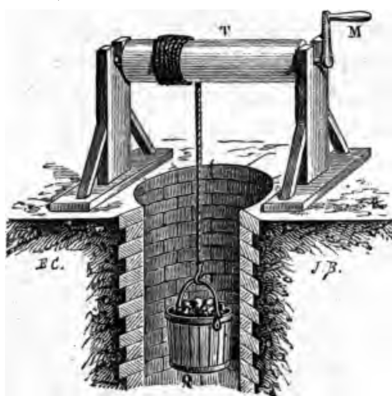
90. **Tour** ou **treuil.** — Le tour est un solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe. Si l'on néglige les frottements, la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre est que *la somme algébrique des moments des forces appliquées, par rapport à l'axe de rotation, soit nulle* (n° 86). Il suffit donc de projeter les forces sur un plan perpendiculaire à l'axe et d'écrire que la somme des moments des projections, par rapport au pied de l'axe, est *nulle*.

Dans la pratique l'axe de rotation est horizontal ou vertical ; quand il est horizontal, la machine s'appelle spécialement *treuil* ; quand il est vertical, elle porte le nom de *cabestan*.

Supposons d'abord l'axe horizontal (*fig*. 81). Le treuil sert alors à élever un fardeau dont le poids représente la résistance. Il se compose d'un cylindre en bois ou en métal, l'arbre du treuil, terminé à ses extré-

mités par des *tourillons* reposant sur des *coussinets* : sur ce cylindre est enroulée une corde fixée par une de ses extrémités au cylindre même et soutenant par l'autre le fardeau Q à élever ; la puissance P agit sur ce cylindre, soit par l'intermédiaire d'une manivelle M, comme dans la figure 81, soit par l'intermédiaire d'une corde enroulée sur une roue de même axe, d'un diamètre plus grand, invariablement liée au cylindre.

Fig. 81.



Le système étant supposé en équilibre, négligeons le poids de la corde qui porte le fardeau Q : la tension de cette corde est alors, en tous les points de sa partie verticale, égale à Q. Le treuil est donc sollicité :

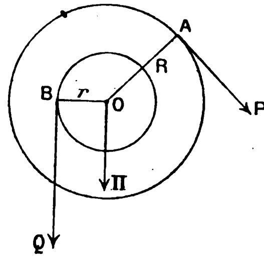
1° Par la résistance verticale Q tangente au cylindre ;

2° Par la puissance P tangente à la grande roue ;

3° Par son poids Π appliqué en son centre de gravité G, point qui, par raison de symétrie, est évidemment sur l'axe de rotation.

En projetant ces forces sur un plan perpendiculaire à l'axe, nous avons la figure 82, où toutes les forces se projettent en vraie grandeur. Appelons r et R les rayons du cylindre et de la roue et écrivons que la somme des moments des forces, par rapport à l'axe O, est nulle : nous aurons, puisque le moment du poids Π est évidemment nul, la condition d'équilibre

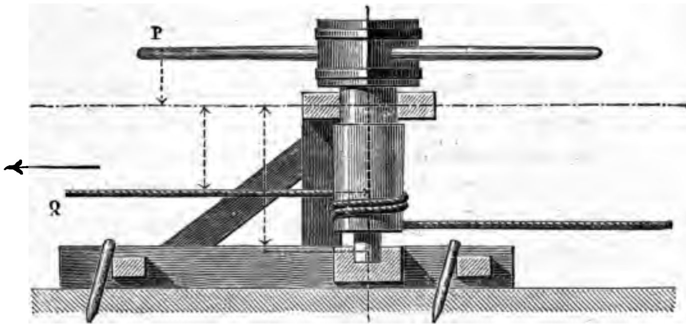
Fig. 82.



$$PR = Qr.$$

La puissance est à la résistance comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue.

Fig. 83.

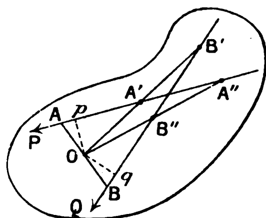


Le cabestan est un tour à axe vertical manœuvré par des barres horizontales; la figure 83 suffit à en

faire comprendre la disposition. La seule différence avec le cas précédent vient de ce que la corde n'est pas fixée à l'arbre du treuil, elle fait seulement quelques tours sur le cylindre et le brin libre est tiré par un homme; l'expérience montre que la traction ainsi exercée et l'enroulement de la corde déterminent une adhérence suffisante pour s'opposer à tout glissement.

91. **Levier.** — Le levier est un corps solide *mobile autour d'un point fixe* appelé *point d'appui* du levier (*fig.* 84). Ce corps est sollicité par deux forces, la puissance P et la résistance Q. Pour être rigoureux, il faudrait tenir compte du poids du levier qui constitue une troisième force appliquée au solide; mais ce poids étant, dans la pratique, très petit par rapport aux forces P et Q, nous le négligerons complètement.

Fig. 84.



Dans ces conditions, pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que *les deux forces* P *et* Q *admettent une résultante unique passant par le point fixe* O (n° 85).

En détaillant cette condition, on peut dire : il faut et il suffit

1° Que les deux forces soient dans un même plan avec le point fixe;

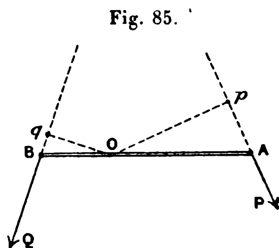
2° Que leur moment résultant, par rapport à ce point, soit nul.

Les longueurs Op et Oq des perpendiculaires abaissées du point fixe O sur les deux forces s'appellent *les bras de levier des deux forces*. La seconde condition d'équilibre exige que les deux forces tendent à faire tourner en sens contraires autour de O et que l'on ait

$$P.Op = Q.Oq. \tag{1}$$

Pour l'équilibre *il faut et il suffit que les deux forces soient dans un même plan avec le point d'appui et soient inversement proportionnelles à leurs bras de levier.*

Fig. 85.



La charge du point d'appui est alors égale à la résultante des deux forces P et Q.

Il arrive fréquemment que l'on figure schématiquement un levier par une barre rectiligne AOB en supposant les points d'application A et B des deux forces en ligne droite avec le point d'appui (*fig.* 85). On a le droit de le faire, car en menant, par O, une droite s'appuyant sur les lignes d'action des deux forces en A et B (*fig.* 84), on peut toujours transporter ces forces aux points A et B respectivement.

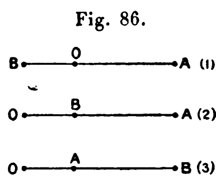
Les points A, O, B étant ainsi ramenés à se trouver en ligne droite, il est d'usage de classer les leviers en trois genres, suivant la disposition relative des trois

points. Mais cette classification n'a de sens précis que dans le cas où les forces P et Q sont parallèles, car, si elles forment un angle comme dans la figure 84, on peut toujours, en faisant tourner la transversale AOB autour de O, dans le plan des deux forces, l'amener dans des positions A'OB', A"OB", telles que les points de rencontre avec les deux forces aient toutes les dispositions possibles par rapport à O.

Ces réserves faites, la classification adoptée est la suivante :

Premier genre. — Le point d'appui O (*fig.* 86[1]) est compris entre les points A et B d'application de la puissance et de la résistance ; la pince des tailleurs de pierre, le gouvernail des bateaux en sont des exemples ; les ciseaux sont des leviers doubles du premier genre, ainsi que les tenailles.

Fig. 86.



Deuxième genre. — Le point d'application B de la résistance est placé entre le point d'appui O et le point d'application A de la puissance (*fig.* 86[2]) ; la brouette est le type de ce genre de levier ; le casse-noisette forme un levier double du deuxième genre.

Troisième genre. — Le point d'application A de la puissance est placé entre le point d'appui O et le point d'application B de la résistance ; c'est le cas de la pédale du rémouleur (*fig.* 86[3]) ; les pincettes sont formées d'un levier double du troisième genre.

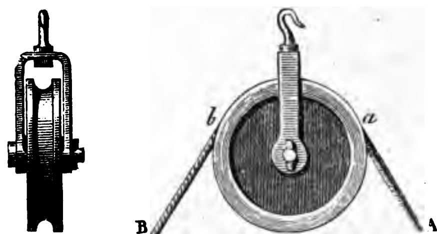
Dans les deux premiers genres, la résistance est, dans la pratique, plus grande que la puissance ; dans le troisième, elle est toujours plus petite.

Dans la pratique, le point fixe est remplacé par une petite surface ou par un axe fixe ; la théorie se rapproche alors de celle du treuil et les conditions d'équilibre se simplifient ; il n'est, en effet, alors pas nécessaire que la puissance et la résistance soient exactement dans un même plan avec le point d'appui ; il suffit de passer en revue les divers exemples que nous venons de donner des leviers des trois genres, pour reconnaître l'exactitude de cette remarque.

92. **Poulie fixe sans frottement sur l'axe.** — La poulie est un disque en métal ou en bois, sur la circonférence duquel est creusée une gorge.

Dans la gorge de la poulie passe une corde, un fil

Fig. 87.

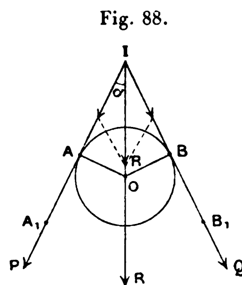


métallique ou une chaîne, aux extrémités desquels agissent la puissance aA et la résistance bB (*fig.* 87).

La poulie est assujettie à tourner autour d'un axe

perpendiculaire à son plan passant à travers une ouverture circulaire faite en son centre et nommée *œil*; les extrémités de l'axe s'appuient sur la *chape* de la poulie, pièce de fer dont les deux branches embrassent la poulie et qui est terminée à sa partie supérieure par un crochet fixé à un point invariable.

Fig. 88.



La poulie est un appareil de levage ou de transmission.

Soient P et Q deux forces tangentiellement appliquées aux extrémités A_1 B_1 de la corde de la poulie; pour qu'il y ait équilibre, il faut que la somme des moments de ces deux forces, par rapport à l'axe O, soit nulle (*fig.* 88), ce qui s'écrit

$$P \times OA - Q \times OB = o,$$

puisque les forces tendent à faire tourner la poulie en sens inverse ; mais

$$OA = OB,$$

donc

$$P = Q.$$

Si l'on néglige le poids de la poulie, la pression totale supportée par l'axe est égale à la résultante des deux forces P et Q. Transportons ces deux forces en I, leur point de rencontre, et transportons leur résultante

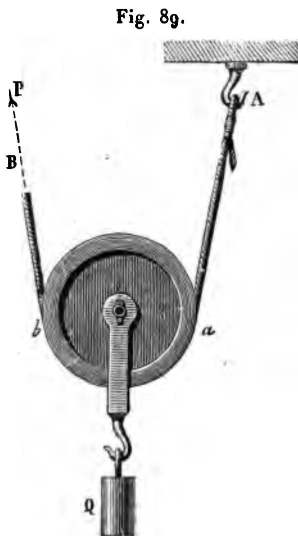
R en O sur l'axe ; on voit immédiatement sur la figure 88 que

$$R = 2\,P\cos\alpha,$$

en appelant 2α l'angle des cordes. Cette pression totale est maximum, et égale au double 2 P de la résistance, si les cordes sont parallèles ; elle est d'autant plus faible que la direction de la force est moins modifiée.

93. **Poulie mobile.** — Imaginons une poulie mobile reposant par sa gorge sur une corde dont une extrémité est liée à un point fixe A, l'autre B étant tirée par une force P, la puissance (*fig.* 89). Le fardeau, qui constitue la résistance, est attaché à la chape et son poids ajouté à celui de la poulie est une force Q appliquée au centre de la poulie.

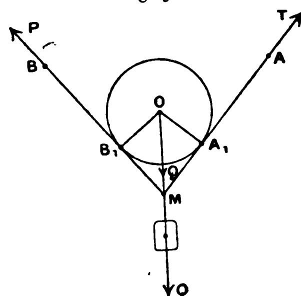
Fig. 89.



La réaction du point fixe A sur la corde est une tension T dirigée suivant A_1A (*fig.* 90) ; l'équilibre doit donc avoir lieu entre les trois forces P, T et Q que l'on peut supposer appliquées en A, B et O ; il faut pour cela qu'elles soient

dans un même plan, qu'elles concourent en un même point et s'y fassent équilibre. La résistance Q doit donc être dans le plan de la poulie ; les forces P et T doivent se rencontrer en un point M sur OQ ; elles font donc des angles égaux avec cette droite et, comme leur résultante doit être égale et opposée à Q, qui est dirigée suivant la bissectrice de l'angle BMA, il en résulte que l'on doit avoir P = T ; la tension est donc la même tout le long de la corde.

Fig. 90.



Si l'on appelle 2α l'angle des cordes, on a alors, comme dans le calcul de la pression totale de l'axe de la poulie fixe,

$$Q = 2\,P\cos\alpha,$$

ou

$$P = \frac{Q}{2\cos\alpha}.$$

Quand on tire sur la corde B, la poulie s'élève, α augmente, la puissance augmente également, et il faudrait une puissance théoriquement infinie pour amener la poulie à reposer sur une corde tendue horizontalement. On doit donc chercher à s'éloigner, autant que possible, de ce cas limite si désavantageux ;

si, au contraire, les cordes sont parallèles et verticales, on a

$$P = \frac{Q}{2},$$

la puissance est moitié du fardeau à soulever.

94. **Combinaisons de poulies.** — On peut combiner des poulies fixes et des poulies mobiles ; on obtient ainsi des appareils qui peuvent élever lentement de très lourds fardeaux. Dans tous ces appareils les cordons sont sensiblement parallèles.

1° **Première combinaison.** — Le fardeau est attaché à une première poulie mobile A, dont la corde est fixée par un bout à un point fixe *a* et par l'autre bout à la chape d'une deuxième poulie mobile B qui est à son tour embrassée par une corde dont une extrémité *b* est fixe, tandis que l'autre est attachée à la chape d'une troisième poulie mobile C, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'enfin la corde d'une dernière poulie mobile vienne passer sur une poulie fixe de renvoi servant à transmettre l'effort dans la direction de la puissance P (*fig.* 91). D'après la théorie de la poulie, la tension de chaque cordon qui soutient A est

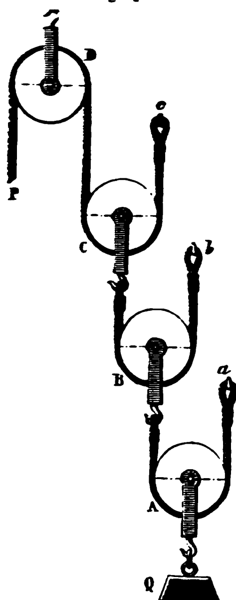
$$T_1 = \frac{Q}{2};$$

or cette tension joue le rôle de résistance pour la poulie

suivante et par suite la tension des cordons de la deuxième poulie est

$$T_2 = \frac{T_1}{2} = \frac{Q}{4} = \frac{Q}{2^2}$$

Fig. 91.



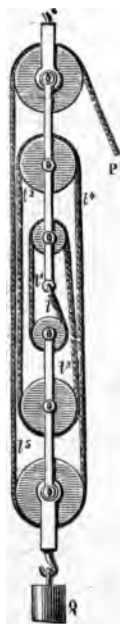
et ainsi de suite; la tension du $n^{ième}$ cordon étant la puissance P, on aura

$$P = \frac{Q}{2^n}.$$

Si donc n est le nombre des poulies, le rapport de la résistance à la puissance est 2^n.

2° **Moufles.** — Les moufles sont formées de deux systèmes de poulies réunies en nombre égal dans une même chape ; l'une des chapes est fixe et l'ensemble de ses poulies constitue la *moufle fixe,* l'autre est mobile et soutient les poulies qui forment la *moufle mobile*. La résistance est attachée à la moufle mobile ; la corde unique, attachée au bas de la chape fixe, s'enroule ensuite alternativement sur une poulie de la moufle mobile et sur une poulie de la moufle fixe pour se terminer par le *garaut,* où est attachée la puissance P (*fig.* 92).

Fig. 92.



Comme il n'y a qu'un cordon, la tension est la même sur tous les *courants* et égale à P ; l'une quelconque des poulies est donc sollicitée par deux forces parallèles et égales à P qui donnent une résultante 2P que l'on peut supposer appliquée en son centre, c'est-à-dire à la chape. Si l'on appelle n le nombre des poulies montées sur la chape mobile, le nombre des cordons est $2n$ et la chape mobile sera sollicitée par une force $2nP$; l'équilibre aura lieu si

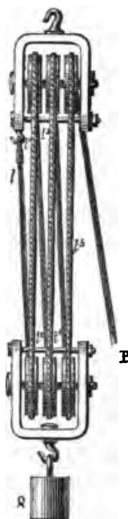
$$2nP = Q.$$

Le rapport entre la résistance et la puissance est égal au double du nombre des poulies de la moufle mobile

ou au nombre $2n$ des cordons qui embrassent les poulies.

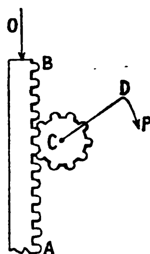
3° **Palan.** — Les poulies placées les unes au-dessous des autres forment un appareil de grande longueur ; aussi préfère-t-on le plus souvent monter les poulies de chaque moufle, fixe et mobile, sur un même axe. La figure 93 fait comprendre ce dispositif dont la théorie est d'ailleurs identique à la précédente.

Fig. 93.



95. **Cric.** — Le *cric* se compose essentiellement d'une crémaillère AB guidée longitudinalement et mise en mouvement par un pignon C. On emploie cette machine à soulever d'une petite hauteur des corps d'un grand poids. La résistance est alors une force Q s'opposant au mouvement de la crémaillère AB : nous la supposerons dirigée dans le sens BA (*fig.* 94). La puissance est une force P perpendiculaire à une manivelle CD invariablement liée au pignon C. Appelons r le rayon du pignon, R celui de la manivelle. La crémaillère agit sur le pignon avec une force F tangente au pignon ; inversement, le pignon agit sur la crémaillère avec

Fig. 94.



une force F égale et opposée. L'équilibre du pignon exige

$$Fr = PR.$$

L'équilibre de la crémaillère

$$F = Q.$$

On a donc enfin

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{R}.$$

La puissance appliquée perpendiculairement à la manivelle est à la résistance, dans le sens de la crémaillère, comme le rayon du pignon est au rayon de la manivelle.

Lorsqu'on veut encore diminuer davantage le rapport $\frac{P}{Q}$, sans augmenter le bras de levier de la manivelle et sans diminuer le rayon du pignon, on fait agir le pignon sur une roue intermédiaire de rayon R' invariablement liée à un pignon de rayon r' qui engrène avec la crémaillère.

On a alors

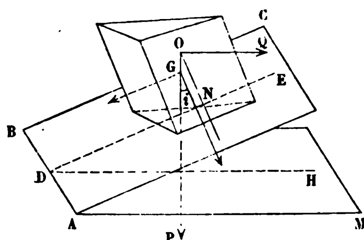
$$\frac{P}{Q} = \frac{rr'}{RR'}.$$

96. **Plan incliné : Équilibre d'un corps pesant sur un plan incliné poli.** — Soit un solide pesant reposant sur un plan incliné parfaitement poli (*fig.* 95). Si ce corps était abandonné sous l'action de la seule

pesanteur, il ne serait évidemment pas en équilibre, car son poids P n'est pas normal au plan.

Cherchons ce que doit être une force auxiliaire Q appliquée au corps, pour que l'équilibre ait lieu.

Fig. 95.

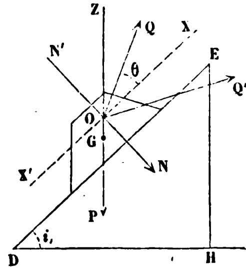


D'après le théorème général (n° 87), il faut et il suffit *que les forces* P *et* Q *aient une résultante unique normale au plan, dirigée de façon à appliquer le corps contre le plan et perçant le plan dans l'intérieur du polygone d'appui.*

D'abord, pour que P et Q aient une résultante unique, il faut que ces deux forces soient dans un même plan. Elles ne peuvent pas être parallèles, car elles n'auraient pas une résultante *normale* au plan. Elles doivent donc concourir en un point O du corps. La résultante N de P et Q étant normale au plan incliné, le plan QOP est perpendiculaire au plan incliné, car il contient N; il est perpendiculaire aussi au plan horizontal, car il contient P : il est donc perpendiculaire à l'intersection AB des deux plans.

Une première condition nécessaire d'équilibre est donc que la force Q soit située dans le plan mené par le centre de gravité G perpendiculairement à la trace horizontale AB du plan incliné. Ce plan coupe le plan incliné suivant une ligne de plus grande pente DE, le plan horizontal suivant DH; l'angle i de ces deux droites est l'inclinaison du plan incliné (*fig.* 96). Nous prendrons ce plan pour plan de la figure. Menons par O un axe X'OX parallèle à la ligne de plus grande pente en prenant comme sens positif le sens ascendant OX, et un axe ON' normal au plan, en prenant comme sens positif le sens ascendant ON'. Appelons θ l'angle de OQ avec OX, cet angle étant compté positivement dans le sens qui va de OX vers ON'. Dans la figure cet angle est positif; si la force OQ prenait la position OQ', l'angle θ deviendrait négatif.

Fig. 96.



Cela posé, les deux forces concourantes OP et OQ doivent avoir une résultante N, normale au plan, dirigée en sens contraire ON'. La somme des projections de ces deux forces, sur un axe quelconque, est égale à la projection de leur résultante. Donc la somme des projections de P et Q sur OX doit être *nulle* et la somme de leurs projections sur ON' doit être *négative* et égale à — N, N désignant la valeur absolue de la pression du

corps sur le plan. On a ainsi les deux équations nécessaires d'équilibre.

$$(1) \qquad \begin{cases} Q\cos\theta - P\sin i = 0, \\ Q\sin\theta - P\cos i \leqslant 0; \end{cases}$$

la pression N sur le plan étant donnée par

$$(2) \qquad Q\sin\theta - P\cos i = -N,$$

Si les deux équations (1) sont satisfaites, les forces P et Q ont une résultante unique normale au plan, vers le plan. Mais il reste à réaliser la condition *que cette résultante perce le plan dans l'intérieur du polygone d'appui.* Pour cela il faut et il suffit que la direction de la force Q rencontre la verticale GZ du centre de gravité en un point O dont la projection sur le plan incliné soit dans le polygone d'appui. Nous supposerons cette condition remplie.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE IV

1. Dans l'équilibre d'un corps pesant sur un plan incliné parfaitement poli on demande, en adoptant les notations du nº 96, de résoudre la question suivante :

La grandeur de la force Q étant donnée, sous quel angle faut-il la faire agir pour tenir le corps en équilibre ?

Réponse. — On a

$$\cos\theta = \frac{P\sin i}{Q}.$$

Pour que le problème soit possible il faut $Q \geqslant P\sin i$. On

trouve alors, pour θ, deux valeurs égales et de signes contraires $\pm \alpha$.

En outre la seconde condition.

$$\text{(C)} \qquad Q \sin \theta - P \cos i \leqslant 0$$

devra être vérifiée.

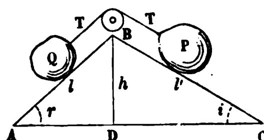
Discussion. — 1° Si l'on prend pour θ la valeur négative $-\alpha$, c'est-à-dire si la force Q a une position telle que OQ', au-dessous de OX, la condition (C) est toujours vérifiée, car $\sin \theta$ est négatif. L'équilibre a lieu quelque grand que soit Q.

2° Si l'on prend, pour l'angle aigu θ, la valeur positive $+\alpha$, on montrera que Q doit être inférieur à P pour que l'équilibre puisse avoir lieu pour une valeur positive de θ.

Donc, si la force Q tire au-dessus de OX, elle doit être comprise entre $P \sin i$ et P.

2. **Plans inclinés adossés.** — Deux corps pesants de poids P et Q sont placés sur deux plans inclinés adossés (*fig.* 97) parfaitement polis. Ils sont reliés entre eux par une corde de poids négligeable passant sur une poulie placée au-dessus de l'intersection B des deux plans et mobile autour d'un axe parallèle à cette intersection. Les deux parties de la corde sont supposées parallèles aux lignes de plus grande pente des deux plans. Condition d'équilibre.

Fig. 97.



Réponse. — En appelant i et r les angles des deux plans avec l'horizon, on a

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin r}{\sin i}.$$

3. Une équerre isoscèle AOB est mobile autour d'un axe hori-

zontal, perpendiculaire à son plan, passant par le sommet O de l'angle droit. On donne la longueur

$$OA = OB = a$$

des côtés de l'angle droit et le poids p de l'équerre. Au sommet A on suspend un poids donné P; l'équerre prend une position d'équilibre : calculer l'angle que fait, dans cette position, la médiane OM de l'équerre avec la verticale.

4. Un corps pesant, de poids p, ayant la forme d'une demi-sphère, repose, par sa surface convexe, sur un plan horizontal; ce corps n'est pas homogène; son centre de gravité G est supposé placé au milieu du rayon perpendiculaire à la face plane. On suspend en un point de la circonférence qui limite l'hémisphère un poids donné P.

Trouver la position d'équilibre du système.

5. Un cube homogène pesant, de poids P, repose, par une face, sur un plan incliné parfaitement poli. Au centre O de la face opposée est attaché un fil sans masse qui passe sur une poulie infiniment petite mobile autour d'un axe parallèle aux horizontales du plan et porte à son autre extrémité un poids donné Q.

Trouver les positions d'équilibre du système, connaissant l'inclinaison du plan et la distance a de la poulie au plan.

CHAPITRE V

TRAVAIL DANS LES MACHINES

§ I. — APPLICATION DE LA NOTION DE TRAVAIL AUX CONDITIONS D'ÉQUILIBRE

97. **Application de la notion de travail aux conditions d'équilibre des machines simples, sans frottement.** — Les machines simples que nous avons étudiées sont des systèmes matériels, assujettis à des liaisons, sur lesquels on fait agir deux forces : la puissance P et la résistance Q, appliquées respectivement à deux points matériels A et B de la machine.

En supposant qu'il n'y ait pas de frottement, nous avons donné les conditions nécessaires et suffisantes qui doivent, dans chaque position de la machine, lier P et Q, pour que la machine soit en équilibre dans cette position. Mais les machines servent rarement à l'état d'équilibre : on les utilise à l'état de mouvement pour transformer un travail en un autre. C'est en se plaçant à ce point de vue qu'on est conduit aux considérations suivantes.

Imaginons une machine sans frottement, ce qui est

un cas tout à fait idéal. Supposons que cette machine se mette en mouvement, comme il arrivera évidemment si, pendant un court instant, on donne à la puissance une intensité supérieure à celle P qui convient à l'équilibre : une fois la machine lancée, nous supposerons que, dans chaque position considérée, P et Q remplissent les conditions d'équilibre.

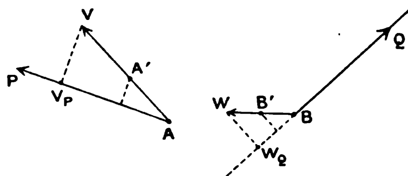
On a alors le théorème suivant :

Si une machine simple est mise en mouvement, les conditions d'équilibre étant remplies à chaque instant, le travail de la puissance est égal et de signe contraire à celui de la résistance.

Écrivons d'abord les équations qui, sous des formes diverses, expriment ce théorème, que nous vérifierons ensuite pour chaque machine.

Première forme. — Supposons qu'à l'instant t le point d'application de la puissance soit en A, celui de

Fig. 98.



la résistance en B ; au bout du temps infiniment court Δt, la machine a subi un déplacement élémentaire amenant A en A' et B en B' (*fig.* 98).

Le travail élémentaire de la puissance P est alors

$$P.AA'.\cos PAA';$$

celui de la résistance Q

$$Q.BB'.\cos QBB'.$$

Il faut vérifier que ces deux travaux élémentaires sont égaux et de signes contraires, si les forces P et Q se font équilibre, c'est-à-dire que l'on a alors

$$(1) \qquad P.AA' \cos PAA' + Q.BB' \cos QBB' = 0.$$

Deuxième forme. — Cette équation, qu'il s'agit de vérifier, peut s'écrire sous une autre forme, si l'on y introduit les vitesses V et W avec lesquelles se déplacent les points matériels A et B auxquels sont appliquées les forces P et Q.

En effet, le déplacement AA' étant infiniment petit et s'effectuant pendant le temps Δt, la vitesse V du point A est, en grandeur, direction et sens, la limite du rapport $\frac{AA'}{\Delta t}$; de même $W = \lim \frac{BB'}{\Delta t}$.

Divisant alors la relation (1) par Δt, faisant tendre Δt vers zéro, et remarquant que les limites des angles PAA' et QBB' sont les angles (P,V) et (Q,W) formés par les vecteurs P et V d'une part, Q et W de l'autre, on est conduit à vérifier la proposition suivante :

Si les conditions de l'équilibre sans frottement sont remplies, on a, à chaque instant,

$$(2) \qquad PV \cos (P,V) + QW \cos (Q,W) = 0.$$

Les quantités $V \cos(P,V)$, $W \cos(Q,W)$ désignent les projections respectives V_P et W_Q de V et W sur les forces P et Q ; donc la relation (2), à vérifier, peut s'écrire

$$PV_P + QW_Q = 0, \tag{3}$$

ou

$$\frac{P}{Q} = -\frac{W_Q}{V_P}. \tag{4}$$

Cette relation montre immédiatement que V_P et W_Q sont de signes contraires : ainsi, dans la figure 98, V_P est positif et W_Q négatif. En outre, on peut énoncer la relation (4), à vérifier, comme il suit :

Si les conditions d'équilibre sans frottement sont remplies, le rapport de la puissance à la résistance est égal au rapport inverse des vitesses des points d'application de la puissance et de la résistance estimées respectivement suivant les directions de ces deux forces.

C'est ce fait général que l'on énonce quelquefois sous une forme concise en disant :

Ce qu'on gagne en force on le perd en vitesse.

Remarque. — Les propositions précédentes sont générales. Dans la pratique, il arrive ordinairement que, pour utiliser la puissance tout entière, c'est-à-dire pour rendre maximun le terme $PV \cos(P,V)$, on la dirige dans le sens même de V ou de AA', alors le cosinus devient égal à 1. Si en outre Q est dirigé en

sens contraire de W ou de BB', on a

$$\cos(Q, W) = -1$$

et la relation fondamentale à vérifier prend la forme simple

$$PV - QW = 0$$

ou

$$P.AA' - Q.BB' = 0;$$

c'est ce qui arrive par exemple pour le treuil.

Passons maintenant à la vérification demandée.

98. **Treuil.** — Soit, en reprenant les notations et la figure du n° 90, un treuil en équilibre sous l'action des deux forces P et Q appliquées en A et B. Si l'on fait tourner le treuil d'un angle infiniment petit $\Delta\theta$ autour de son axe, dans le sens de P, le point d'application A de P subit un déplacement élémentaire $AA' = R\Delta\theta$ dans le sens de P, et le point d'application B de Q subit un déplacement élémentaire $BB' = r\Delta\theta$ en sens contraire de Q. La somme des travaux élémentaires des deux forces est alors

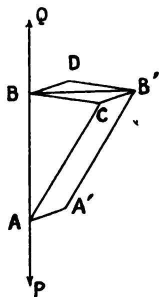
$$P.AA' - Q.BB' = (PR - Qr)\,\Delta\theta.$$

Cette somme est *nulle* si P et Q se font équilibre. En supposant que la machine marche, les forces étant constamment en équilibre, le travail total des deux forces, somme des travaux élémentaires, sera nul.

99. **Corps solide sollicité par deux forces égales et directement opposées.** — Soit un solide

libre sollicité par deux forces P et Q, égales et directement opposées appliquées en A et B (*fig.* 99). Ce corps est en équilibre. Nous allons voir que, pour un déplacement élémentaire quelconque du corps, la somme des travaux des deux forces est nulle.

Fig. 99



Prenons le déplacement élémentaire le plus général possible, et supposons que les deux points A et B viennent en A′ et B′, leur distance ne changeant pas, puisque A et B sont deux points matériels d'un corps solide. Menons par A une droite AC égale et parallèle à A′B′ : le déplacement BB′ est la somme géométrique de deux déplacements, l'un BC obtenu en déplaçant la droite AB de façon que son extrémité A reste fixe, l'autre BD égal et parallèle à CB′, c'est-à-dire à AA′. Le travail de Q, pour le déplacement BB′, est alors la somme des travaux de Q pour les déplacements BC et BD et la somme des travaux des deux forces P et Q, dans le déplacement total, est

$$P.AA' \cos P.AA' + Q.BD \cos Q.BD + Q.BC \cos Q.BC.$$

Cette somme est *nulle* : d'abord les deux premiers termes sont égaux et de signes contraires, car $P = Q$, $AA' = BD$, $\cos PAA' = -\cos QBD$, les angles PAA′ et QBD étant supplémentaires ; puis le dernier terme est nul aussi : car, la distance du point A au point B étant invariable dans le déplacement, le dépla-

cement infiniment petit BC est sur une sphère de centre A et de rayon AB, et la force Q est *normale* à ce déplacement.

Le théorème est ainsi démontré.

Conséquence. Quand un corps solide se déplace, on n'altère pas le travail d'une force P appliquée au corps en la transportant en un point de sa ligne d'action. En effet, soit (*fig*. 48) une force P appliquée en un point A d'un solide; prenons sur sa ligne d'action un point B invariablement lié au solide et appliquons en B une force P′ égale et parallèle à P et une force — P′ égale et directement opposée. Quand le corps se déplace le travail de P′ est égal et de signe contraire à celui de — P′, le travail de P est égal et de signe contraire à celui de — P′ : le travail de P′ est donc égal à celui de P.

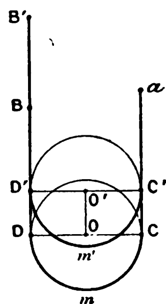
100. **Levier.** — Soit un levier en équilibre sous l'action de deux forces P et Q appliquées en A et B. Si l'on déplace le levier autour de son point d'appui O, la somme des travaux élémentaires de P et Q est nulle. En effet, ces deux forces étant dans un même plan avec O sont, en général, concourantes en un point C : on peut, sans changer leurs travaux, les transporter au point C de leurs lignes d'action. En C elles se composent en une résultante R, et le travail de cette résultante est égal à la somme des travaux des composantes. Cette résultante passant par O peut être transportée en O ;

mais alors son travail est évidemment *nul*, car O est immobile.

Le raisonnement serait en défaut, si P et Q étaient parallèles : mais alors, il suffit, comme dans la composition des forces parallèles, d'appliquer en A et B deux forces auxiliaires F et G égales et directement opposées. La somme des travaux des forces n'est pas altérée, car la somme des travaux de F et G est nulle. Les forces F et P ont une résultante P′, G et Q une résultante Q′ : la somme des travaux de P et Q égale la somme des travaux de P′ et Q′ et cette dernière somme est *nulle*, d'après le raisonnement du cas général.

101. **Poulies. Moufles.** — Dans les combinaisons de poulies étudiées au n° 94 la même proposition est facile à retrouver ; dans la première combinaison, si la poulie A et, par suite, le point d'application de la résistance Q s'élèvent de h, la poulie B s'est élevée de $2h$; en effet, si le centre est passé de O en O′ (*fig.* 100), tel que $OO' = h$, la corde est passée de la position $aCmDB$ à la position $aC'm'D'B'$, a étant fixe ; la longueur comprise entre a et B a donc diminué de $CC' + DD' = 2h$ et, comme la longueur totale de corde n'a pas changé, le point de la corde qui était en B s'est élevé de $BB' = 2h$.

Fig. 100.



La poulie C s'est alors élevée de $2\,(2h) = 2^2 h$ et la

poulie de rang n de $2^n h$. Le point d'application de la puissance P a donc décrit un chemin $2^n h$ et le travail de la puissance est $P 2^n h$; le point d'application de la résistance Q a décrit le chemin $OO' = h$ et le travail de la résistance est $- Q . h$. D'après les conditions d'équilibre la somme de ces deux travaux est nulle. L'appareil permet de vaincre une résistance 2^n fois plus grande que la puissance employée, mais à condition que le point d'application de la puissance parcoure un chemin 2^n fois plus grand que celui parcouru par le point d'application de la résistance.

Dans les deux autres combinaisons, si la résistance s'élève de h, chacun des $2n$ cordons parallèles est diminué de h, et par suite le point d'application de la puissance est déplacé de $2nh$; ici encore, ce qu'on a gagné en force on le perd en chemin parcouru dans la direction de la force.

§ II. — APPLICATION DU THÉORÈME DES FORCES VIVES AUX MACHINES

102. **Théorème des forces vives pour un système de points.** — Imaginons un système de points matériels de masses m_1, m_2, . . . , m_n soumis à des forces ; soient F_1 la résultante des forces appliquées au point m_1, F_2 la résultante des forces appliquées au point m_2, . . . , etc. Considérons le mouvement du

système depuis l'instant t où les vitesses des points sont v_1, v_2, ..., v_n, jusqu'à un instant postérieur t' où ces vitesses sont devenues v'_1, v'_2, ..., v'_n. Le théorème de la force vive (n° 47) appliqué successivement à chacun des points donne

$$\frac{m_1 v_1'^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} = \mathfrak{T}(F_1),$$
$$\frac{m_2 v_2'^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} = \mathfrak{T}(F_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\frac{m_n v_n'^2}{2} - \frac{m_n v_n^2}{2} = \mathfrak{T}(F_n),$$

où $\mathfrak{T}(F_1)$, $\mathfrak{T}(F_2)$, ..., $\mathfrak{T}(F_n)$ désignent respectivement les travaux totaux des forces F_1, F_2, ..., F_n appliquées à chacun des points, dans l'intervalle de temps considéré. En ajoutant toutes ces équations membre à membre, on a

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 + \dots + m_n v_n'^2}{2} \\ &\qquad - \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \dots + m_n v_n^2}{2} \\ &= \mathfrak{T}(F_1) + \mathfrak{T}(F_2) + \dots + \mathfrak{T}(F_n). \end{aligned}\right.$$

La quantité

$$\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \dots + m_n v_n^2}{2}$$

s'appelle *la demi-force vive totale du système ou l'éner-*

gie cinétique du système. On peut donc énoncer le théorème général suivant :

La variation de la demi-force vive (ou énergie cinétique) d'un système, dans un intervalle de temps quelconque, est égale à la somme des travaux de toutes les forces, agissant sur les points du système, dans le même intervalle.

103. Calcul de la force vive d'un solide dans quelques cas simples : 1° Mouvement de translation. — Soit un corps solide animé d'un mouvement de translation de vitesse v : calculons la force vive du corps.

Le solide considéré est composé de points matériels de masses m_1, m_2, . . . , m_n ; la somme M de ces masses est la masse totale du corps. Tous les points ont, au même instant, la même vitesse v. La force vive est donc

$$m_1 v^2 + m_2 v^2 + \cdots + m_n v^2,$$

c'est-à-dire, en mettant v^2 en facteur,

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_n) v^2 = \mathrm{M} v^2.$$

La force vive d'un solide animé d'un mouvement de translation est donc égale à la masse totale du solide multipliée par le carré de la vitesse de translation.

2° Mouvement de rotation. — Soit un solide tournant autour d'un axe fixe, avec une vitesse angulaire ω ; calculons sa force vive. Le solide est formé de points

de masses m_1, m_2, ..., m_n situés à des distances respectives r_1, r_2, ..., r_n de l'axe de rotation. Les vitesses linéaires de ces points sont alors :

$$v_1 = r_1\omega, \quad v_2 = r_2\omega, \quad \ldots, \quad v_n = r_n\omega,$$

et la force vive totale est

$$m_1 r_1^2 \omega^2 + m_2 r_2^2 \omega^2 + \cdots + m_n r_n^2 \omega^2$$

ou, en mettant ω^2 en facteur,

$$(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_n r_n^2)\,\omega^2 = \mathrm{I}\,\omega^2,$$

en posant

$$\mathrm{I} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_n r_n^2.$$

La somme I a été appelée *moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de rotation.*

En langage ordinaire, *le moment d'inertie d'un solide, par rapport à un axe, est la somme des produits obtenus en multipliant la masse de chaque point du solide par le carré de sa distance à l'axe.*

On voit que *la force vive d'un solide qui tourne autour d'un axe est égale à son moment d'inertie, par rapport à l'axe, multiplié par le carré de sa vitesse angulaire.*

104. **Travail des forces appliquées à un solide.** — Imaginons un solide sur lequel agissent de l'extérieur des forces F, F′, F″, ... Le corps solide

considéré est composé de points m_1, m_2, . . . , m_n en très grand nombre qui agissent les uns sur les autres avec certaines forces qu'on appelle *forces intérieures au corps*. Ce sont ces forces qui s'opposent aux déformations du corps, compression, extension, flexion, rupture, etc., en d'autres termes qui maintiennent sa solidité.

On démontre rigoureusement, d'après le théorème du n° 99, la proposition suivante que nous admettrons :

Quand un corps solide se déplace d'une manière quelconque, la somme des travaux des forces intérieures est NULLE.

Il résulte de là que *la somme des travaux de toutes les forces appliquées à un solide se réduit à la somme des travaux des seules forces extérieures* F, F′, F″, ...

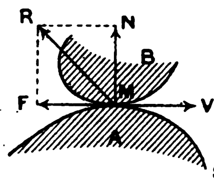
Le théorème des forces vives appliqué à un solide s'énonce donc ainsi :

La variation de la demi-force vive d'un solide, dans un intervalle de temps quelconque, est égale à la somme des travaux des seules forces extérieures.

105. **Lois du frottement de glissement pendant le mouvement.** — Imaginons un solide A terminé par une surface S de forme quelconque et un deuxième solide B qui se meut en glissant sur A (*fig.* 101). Soit M le point matériel de B qui, à l'instant *t*, est en contact avec A. S'il n'y avait pas de frottement, la réaction de A sur B serait une force normale

à la surface S appliquée au point M. S'il y a frottement, la réaction de A sur B est une force R, appliquée au point M et oblique par rapport au plan tangent en M à la surface S : si nous décomposons cette réaction R en deux forces, l'une N normale à S, l'autre F située dans le plan tangent en M à S, la composante N s'appelle *réaction normale* de A sur B et la composante F, *force de frottement*.

Fig. 101.



Les lois généralement admises du frottement de glissement sont alors les suivantes :

1° *La force de frottement* F *est dirigée en sens contraire de la vitesse* V *que possède le point matériel au contact* M, *par rapport à* A.

2° *L'intensité de cette force* F *est indépendante de la grandeur de la vitesse* V : *elle est égale au produit de l'intensité de la composante normale* N *par un facteur constant* f, *qui dépend de la nature des surfaces en contact.*

Le coefficient f s'appelle *coefficient du frottement de glissement* du corps B sur le corps A. Les valeurs des divers coefficients de frottement sont données par des tables où l'on trouvera, par exemple, le coefficient de frottement du bois sur le bois, du bois sur le fer, du fer sur le fer, etc.

Si le corps B touche le corps A par plusieurs points

qui glissent sur sa surface, il faudra appliquer les lois précédentes à chaque point de contact.

En polissant et en graissant les surfaces des corps qui doivent glisser les uns sur les autres, on arrive à diminuer le coefficient de frottement, mais on ne parvient pas à l'annuler complètement, de sorte que le glissement sans frottement ne peut jamais être rigoureusement réalisé.

106. **Travail d'une force de frottement.** — Une force de frottement de glissement produit toujours un *travail négatif*. En effet, quand le corps B glisse sur le corps A supposé fixe, la force F est toujours dirigée en sens contraire de la vitesse du point M auquel elle est appliquée ; elle est donc, à chaque instant, dirigée *en sens contraire* du déplacement élémentaire MM′ du point et son travail élémentaire

$$-F.MM'$$

est *essentiellement négatif*. Son travail total, pendant un intervalle de temps quelconque, est donc toujours *négatif*. On peut dire aussi que chaque force de frottement produit un *travail résistant*.

107. **Définitions.** — Une machine a pour but de transformer un travail en un autre. Elle se compose de trois parties principales qui sont :

1° *Un récepteur* qui reçoit un travail dû à des forces

motrices (force musculaire, chute d'eau, pression d'un gaz ou d'une vapeur, forces électriques ou magnétiques);

2° *Un outil* qui fournit un travail utile, tel que l'ascension d'un fardeau, la traction d'un train, la désagrégation d'un métal par forgeage, rabotage, etc.;

3° *Une transmission de mouvement* reliant le récepteur à l'outil.

Ainsi, dans le treuil, la force motrice est la force musculaire de l'ouvrier qui tourne la manivelle; le travail utile est l'ascension du fardeau suspendu à la corde. Dans une scierie mécanique, le récepteur est la roue hydraulique mue par une chute d'eau, l'outil est la scie qui fournit le travail utile, etc.

Vitesse de régime. — La vitesse d'une pièce doit avoir, dans chaque machine, une valeur déterminée, suivant la nature du travail à produire. La vitesse que doit avoir chaque organe de la machine, pour réaliser ainsi le meilleur travail de l'outil, s'appelle la *vitesse de régime.*

108. **Application du théorème des forces vives aux machines.** — Soit une machine en mouvement de l'instant t_0 à l'instant t; pendant cet intervalle de temps $t - t_0$, les forces motrices agissant sur le récepteur ont produit un *travail moteur* $\mathcal{T}_m$; les résistances subies par l'outil produisent un travail négatif

— $\mathcal{T}_u$; les résistances passives (frottements, trépidations, etc.) produisent un travail négatif — $\mathcal{T}_p$. Le travail $\mathcal{T}_u$, pris en valeur absolue, est le *travail utile*, $\mathcal{T}_p$ le *travail passif;* la somme

$$\mathcal{T}_u + \mathcal{T}_p = \mathcal{T}_r$$

s'appelle le *travail résistant*. Le travail passif $\mathcal{T}_p$ peut être diminué par une bonne disposition des organes, par un graissage soigné; il ne peut jamais être entièrement annulé.

Si l'on appelle v_0 la vitesse d'une molécule m de la machine à l'instant t_0 et v sa vitesse à l'instant t, le théorème des forces vives donne

$$(1) \qquad \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = \mathcal{T}_m - \mathcal{T}_u - \mathcal{T}_p = \mathcal{T}_m - \mathcal{T}_r,$$

où les signes $\sum \frac{mv^2}{2}$ te $\sum \frac{mv_0^2}{2}$ désignent les sommes des demi-forces vives de tous les points de la machine aux instants t et t_0.

Voici quelques conséquences immédiates de cette équation :

1° Supposons que la machine parte du repos et marche jusqu'à l'instant t_1 où les vitesses sont v_1 ; alors, en affectant de l'indice 1 les travaux effectués jusqu'à cet instant,

$$\sum \frac{mv_1^2}{2} = \mathcal{T}_m^1 - \mathcal{T}_u^1 - \mathcal{T}_p^1,$$

d'où

$$\sum \frac{mv_1^2}{2} < \mathcal{T}_m^1 - \mathcal{T}_u^1.$$

Donc, *la demi-force vive que possède une machine est plus petite que le travail dépensé non utilisé depuis sa mise en marche.*

2° La demi-force vive que possède une machine au temps t_1 doit être comptée comme une puissance qui sert au mouvement de la machine pendant les instants suivants; en effet, en appliquant le théorème des forces vives au mouvement qui suit l'instant t_1, du temps t_1, au temps t, on a

$$(2) \qquad \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_1^2}{2} = \mathcal{T}_m - \mathcal{T}_u - \mathcal{T}_p,$$

$$(3) \qquad \mathcal{T}_u = \mathcal{T}_m + \sum \frac{mv_1^2}{2} - \left(\mathcal{T}_p + \sum \frac{mv^2}{2}\right).$$

On voit que la demi-force vive que possède la machine à l'instant t_1 vient s'ajouter à $\mathcal{T}_m$; le travail utile est donc le même que si la machine partant du repos à l'instant t_1, le travail moteur était augmenté de $\sum \frac{mv_1^2}{2}$. Mais, d'après le théorème précédent, cette demi-force vive ne fait que restituer ainsi une partie seulement du travail moteur employé antérieurement à la produire. Donc, dans tous les cas, le travail utile est plus petit que le travail moteur dépensé : ce qui montre *l'impossibilité du mouvement perpétuel.*

3° Dans l'évaluation des travaux effectués, d'un temps t_1 quelconque au temps $t > t_1$, la demi-force vive que possède la machine au temps t doit être comptée comme une résistance; en effet, $\sum \frac{mv^2}{2}$ s'ajoute à $\mathfrak{T}_p$ dans l'équation (3). Si, à ce moment, on arrête la machine, cette force vive, ne se retrouvant plus comme puissance pendant les instants suivants, constitue donc une perte de travail moteur. On peut cependant éviter une partie de cette perte, en laissant la machine libre de continuer à se mouvoir sous l'action de cette force vive, après que le moteur a cessé d'agir. Mais, quand le travail a été longtemps continué, cette perte de force vive, quand on arrête la machine, est une fraction insignifiante du travail dépensé.

L'équation (2) montre que, si dans l'intervalle $t - t_1$ le travail moteur $\mathfrak{T}_m$ est supérieur au travail résistant $\mathfrak{T}_u + \mathfrak{T}_p$, $\sum \frac{mv^2}{2}$ est supérieur à $\sum \frac{mv_1^2}{2}$; la force vive a donc augmenté dans l'intervalle. L'inverse aurait lieu si $\mathfrak{T}_m$ était moindre que $\mathfrak{T}_u + \mathfrak{T}_p$. Donc, en appliquant cette règle à un intervalle de temps très court :

La force vive de la machine croît ou décroît à partir d'un certain moment, suivant que le travail élémentaire moteur l'emporte ou non sur le travail élémentaire résistant.

La force vive passe par un maximum ou un minimum, aux instants où le travail élémentaire moteur égale le travail élémentaire résistant.

109. **Marche de la machine.** — Il faut considérer trois phases dans la marche de la machine :

Mise en marche,
Marche normale,
Période d'arrêt.

Pour la mise en marche, la force vive partant de zéro doit aller en croissant : le travail élémentaire moteur doit l'emporter sur le travail élémentaire résistant. L'inverse a lieu pendant la période d'arrêt.

Marche normale. — L'idéal de la marche normale serait une *marche uniforme* avec la vitesse de régime qui donne le meilleur travail utile. Alors, en appelant t_0 et t deux instants quelconques de la période normale, on aurait, pour chaque point $v = v_0$,

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \sum \frac{mv_0^2}{2},$$

et, par suite, d'après l'équation des forces vives,

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}_r = \mathcal{T}_u + \mathcal{T}_p.$$

Le travail moteur, pendant un espace de temps quelconque de la période de marche normale, serait égal au travail résistant.

Mais cet idéal est impossible à atteindre. C'est ce que nous allons montrer. Nous ferons voir ensuite comment on en approche à l'aide des *volants*.

110. Causes d'irrégularité dans la période de marche normale. — Dans la période de marche normale, il y a différentes causes d'irrégularité dont les principales sont :

1° La présence des pièces à mouvement alternatif ;

2° L'intermittence dans le développement de la force motrice qui peut être, non pas constante, mais seulement périodique ; ainsi, dans les machines à simple effet, la pression de la vapeur sur le piston agit toujours dans le même sens ; elle agit, par exemple, quand le piston monte et cesse quand il descend ; l'action de la force motrice est alors intermittente et périodique ;

3° L'intermittence dans le développement de la résistance utile, qui peut être, non pas constante, mais seulement périodique, comme quand l'outil est un pilon, un marteau, etc.

Appelons ω la vitesse angulaire que possède l'arbre principal de la machine à l'instant t (cylindre du treuil, arbre de la roue hydraulique, arbre de l'hélice dans un bateau, etc.). En vertu des causes d'irrégularité, il est impossible de maintenir la vitesse angulaire ω constante et égale à la vitesse de régime désirée ; le mouvement de la machine est sensiblement périodique, c'est-à-dire qu'il existe un intervalle de temps au bout duquel la machine se retrouve dans la même position et ω reprend la même valeur ; cet intervalle de temps sera, par exemple, le temps que met l'arbre

principal à faire un tour, c'est-à-dire l'angle de rotation θ de cet arbre à croître de 2π. Quand la machine a marché pendant cet intervalle de temps, elle revient au même état géométrique et mécanique ; on dit qu'elle a décrit un *cycle*. L'égalité entre le travail moteur et le travail résistant n'a plus lieu à chaque instant ; mais, quand il s'est écoulé un cycle, les vitesses redevenant les mêmes, la variation de force vive pendant un cycle est nulle, et l'on a l'équation

$$\mathcal{T}_m^c = \mathcal{T}_r^c = \mathcal{T}_u^c + \mathcal{T}_p^c,$$

où l'indice supérieur c indique qu'il s'agit du travail pendant un cycle.

Rendement. — Le rapport du *travail utile au travail moteur pendant un cycle*,

$$\frac{\mathcal{T}_u^c}{\mathcal{T}_m^c} = 1 - \frac{\mathcal{T}_p^c}{\mathcal{T}_m^c}$$

s'appelle le *rendement* de la machine. Le rendement est toujours plus petit que 1, parce qu'il est impossible de faire disparaître complètement les résistances passives.

111. Variations du travail pendant un cycle. — Appelons, comme plus haut, θ l'angle dont l'arbre principal tourne à partir d'une position déterminée considérée comme position initiale. Évaluons le travail total (moteur et résistant) à partir de cette position. Quand θ est nul, ce travail part de zéro ; puis il varie

avec θ et redevient nul pour $\theta = 2\pi$, puisque, dans la marche normale, le travail total est nul pendant un cycle. D'après cela, le travail total, compté à partir de la position où $\theta = 0$, est une certaine fonction $\mathfrak{T}(\theta)$ de la variable θ, qui s'annule pour $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$. Elle a donc dans l'intervalle au moins un maximun et un minimum.

Si l'on divise l'intervalle $0, 2\pi$ de la variable θ en un très grand nombre d'intervalles très petits, la force vive de la machine augmente dans un de ces intervalles quand le travail élémentaire moteur effectué dans le déplacement correspondant est supérieur au travail élémentaire résistant, elle diminue dans le cas contraire. La vitesse angulaire ω de l'arbre principal de la machine passe donc, dans l'intervalle $0, 2\pi$, par une valeur ω_1 plus grande que toutes les autres correspondant à la position où $\mathfrak{T}(\theta)$ est maximum et par une valeur ω_2 plus petite que toutes les autres correspondant à la position où $\mathfrak{T}(\theta)$ est minimum. Comme le cas idéal serait le mouvement uniforme, il faut tâcher de rendre la différence $\omega_1 - \omega_2$ aussi petite que possible.

On y arrive à l'aide des *volants*.

112. **Volant.** — Ceci posé, sans rien changer au reste de la machine et aux forces motrices ou résistantes, montons sur l'arbre principal une roue supplémentaire en fonte, appelée *volant ;* cette roue a ordinairement un grand rayon, et sa masse est reportée, autant que possible, sur la circonférence, où elle forme

une couronne, de façon que le moment d'inertie I du volant par rapport à l'axe soit considérable. Dans la figure 12, on voit un volant V à droite sur l'arbre A.

L'adjonction de cette roue régularise le mouvement; car, si le travail $\mathfrak{T}(\theta)$ diminue, comme cette roue est lancée, elle entraîne la machine par son inertie et, si le travail $\mathfrak{T}(\theta)$ augmente, une partie de ce travail est employée à accroître la force vive du volant et non à accélérer uniquement le mouvement de la machine. Le volant empêche donc les diminutions et les accroissements brusques de vitesses. Il régularise le mouvement d'autant plus que son moment d'inertie est plus considérable.

Les volants deviennent superflus dans les machines qui ont des roues de grands diamètres avec des masses reportées sur leurs bords extérieurs, comme certaines machines hydrauliques.

Dans le tour du rémouleur, la meule de pierre joue le rôle de volant.

113. **Puissance d'une machine.** — La puissance d'une machine est la quantité de travail utile qu'elle peut produire pendant l'unité de temps.

L'unité de puissance est le *cheval-vapeur*; c'est la puissance d'une machine pouvant produire en 1 seconde 75^{kgm} de travail utile.

Quand on dit, par exemple, qu'une machine a une puissance de 100 chevaux-vapeur, cela veut dire qu'elle peut produire 7500^{kgm} de travail utile par seconde.

114. **Freins.** — Lorsqu'on veut ralentir ou arrêter une machine en marche, on commence par supprimer la force motrice : la machine continue à marcher en vertu de la vitesse acquise, et elle s'arrête peu à peu parce que les seules forces qui continuent à agir sont résistantes. Pour abréger cette période d'arrêt, on introduit des résistances ou frottements supplémentaires à l'aide de *freins*.

Par exemple, dans un train, on arrête la vapeur, puis on applique sur le périmètre de chaque roue un corps solide appelé *frein*, de telle façon que la pression normale ait une valeur considérable P. La roue est alors soumise à une force de frottement tangente à la roue, en sens contraire du sens dans lequel elle tourne, et égale à fP, f désignant le coefficient de frottement. Nous regarderons comme évident que le travail dû à l'action des freins sur la roue dépend seulement du déplacement relatif de la roue par rappport au frein. Si la roue de rayon R tourne de $\Delta\Theta$, la molécule à laquelle est appliquée cette force fP se déplace, par rapport au frein, de $R\Delta\Theta$ en sens contraire de fP, et le travail de cette force est

$$-fPR\,\Delta\Theta.$$

La somme de ces travaux élémentaires donnera le travail total du frottement

$$-fPR\Theta,$$

Θ désignant l'angle total dont la roue a tourné.

Si le même dispositif est appliqué à n roues, la somme des travaux de frottement dus aux freins sera

$$-nf\text{PR}\Theta\,;$$

elle croît, en valeur absolue, très rapidement. La force vive du train diminue donc très rapidement et le train s'arrête.

Les freins des bicyclettes, les freins à corde des omnibus, etc. fonctionnent d'après le même principe.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE V

1. Vérifier, pour le cric, le théorème du nº 97.

2. Démontrer que, si un solide subit un déplacement élémentaire quelconque, la somme des travaux élémentaires des forces appliquées n'est pas altérée par les opérations élémentaires.

Réponse. — Il suffit d'examiner successivement l'effet de chaque opération élémentaire et de s'appuyer sur le théorème du nº 99.

3. Si un solide tourne d'un angle infiniment petit $\delta\theta$ autour d'un axe, le travail élémentaire d'une force appliquée au corps est égal à $\delta\theta$ multiplié par le moment de la force par rapport à l'axe de rotation.

FIN

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

Cinématique.

§ I. — *Engrenages cylindriques.*

§ II. — *Systèmes articulés plans.*

CHAPITRE II

FORCES APPLIQUÉES A UN POINT MATÉRIEL

Dynamique et statique du point.

§ I. — *Principes fondamentaux.*

§ II. — *Équilibre d'un point libre.*

§ III. — *Équilibre d'un point matériel non libre.*

§ IV. — *Dynamique du point.*

§ V. — *Travail.*

§ VI. — *Théorème de la force vive.*

CHAPITRE III

Statique des corps solides libres.

§ I. — *Réduction des forces appliquées à un corps solide.*

§ II. — *Forces parallèles.*

§ III. — *Couples.*

§ IV. — *Réduction des forces appliquées à un corps solide, à une force et à un couple.*

§ V. — *Conditions générales d'équilibre d'un solide libre.*

§ VI. — *Équivalence de deux systèmes de forces appliquées à un corps solide. — Cas particuliers de la réduction.*

CHAPITRE IV

Équilibre des corps solides non libres. Machines simples.

§ I. — *Conditions d'équilibre.*

§ II. — *Machines simples.*

CHAPITRE V

Travail dans les machines.

§ I. — *Application de la notion de travail aux conditions d'équilibre.*

